

# مبانی الکترومغناطیس نور

مقطع کارشناسی ارشد

تالیف

حمید عباسی

# تقدیم به روح آسمانی پدرم و لبخند جاودانه اش



مؤلف : حمید عباسی

طراح جلد و صفحه آرا : حمید عباسی

چاپ و صحافی : کویا

نوبت و سال چاپ : اول ، ۱۴۰۳

شمارگان : ۵۰۰ نسخه



سرشناسه : عباسی، حمید، ۱۳۶۷-

عنوان و نام پدیدآور : مبانی الکترومغناطیس نور / تألیف حمید عباسی.

مشخصات نشر : آمل: آرتینه، ۱۴۰۳.

مشخصات ظاهری : ۱۱۳ ص. : جدول، نمودار؛ ۲۲ × ۲۹ س.م.

شابک : ۹۷۸-۶۲۲-۵۷۶۱-۰۲-۵

وضعیت فهرست نویسی : فیپا

موضوع : الکترومغناطیس -- راهنمای آموزشی (عالی)

Electromagnetism -- Study and teaching (Higher)

الکترومغناطیس -- مسائل، تمرینها و غیره (عالی)

Electromagnetism -- Problems, exercises, etc. (Higher)

رده بندی کنگره : QC۷۶۰

رده بندی دیویی : ۵۳۷/۰۷۶

شماره کتابشناسی ملی : ۹۸۹۲۳۱۵

اطلاعات رکورد کتابشناسی : فیپا

## پیش‌گفتار نویسنده

پدرم به من مهربانی آموخت. میراثش این بود که اگر توان کمک به آدمها و بخشیدن را نداشتیم، لااقل سدی برای آرامش شان باشیم. تلاش کنم آدم بهتری باشم. جهان را سبز بخواهم و سبز فکر کنم.

به تالیف این کتاب پرداختم تا هم خودم بیشتر بیاموزم و هم به دانشجویان و دانش پژوهان در راه کسب دانش، کمک کرده باشم.

حاصل تلاش سه ساله‌ام، نگارش این کتاب بود: اولین منبع فارسی درس مبانی الکترومغناطیس در رشته ارشد فیزیک اتمی (فوتونیک، الکترواپتیک و لیزر).

این کتاب از هفت فصل (معادلات ماکسول، امواج در خلاء، امواج در محیط مادی، امواج در محیط‌های پراکنده، پتانسیل، میدان تاخیری و تابش ذرات باردار، آنتن‌ها تداخل و همدوسی) تشکیل می‌شود.

تقدیم به روح آسمانی پدرم و لبخند جاودانه‌اش

حمید عباسی

## فهرست نوشتار

۱.....	فصل اول: معادلات ماکسول
۱.....	۱-۱. مقدمه
۱.....	۱-۱-۱. بار الکتریکی
۱.....	۱-۱-۲. جریان الکتریسته
۲.....	۱-۱-۳. حفظ بار
۳.....	۱-۲. معادلات ماکسول در خلاء
۳.....	۱-۲-۱. الکترواستاتیک
۳.....	۱-۲-۲. مغناطیس استاتیک
۴.....	۱-۲-۳. قانون فارادی
۵.....	۱-۲-۴. جریان جابجایی
۶.....	۱-۲-۵. جریان جابجایی
۶.....	۱-۳. میکروسکوپی در مقابل ماکروسکوپی
۷.....	۱-۳-۱. میانگین گیری لورنتس
۹.....	۱-۳-۲. سطح ماکروسکوپی
۱۰.....	۱-۳-۳. شرایط تطبیق
۱۱.....	۱-۴. معادلات ماکسول در ماده
۱۲.....	۱-۴-۱. منابع و میدان های ماکروسکوپی
۱۳.....	۱-۴-۲. میدان های میکروسکوپی
۱۳.....	۱-۵. فیزیک جدید و محدودیت های کوانتومی
۱۳.....	۱-۵-۱. ماده کوانتیزه شده
۱۳.....	۱-۵-۲. قطبش خلاء

۱۴.....۱-۵-۳. نوسانات کوانتومی.....

۱۵.....۱-۵-۴. بار مغناطیسی.....

۱۶.....۱-۶. واحدهای SI.....

## ۱۸..... فصل دوم: امواج در خلاء.....

۱۸.....۲-۱. مقدمه.....

۱۸.....۲-۲. معادله موج.....

۱۸.....۲-۲-۱. پتانسیل های پیمانه ای لورنتس.....

۱۹.....۲-۲-۲. پتانسیل های پیمانه ای کلمب.....

۱۹.....۲-۳. امواج تخت.....

۲۰.....۲-۳-۱. امواج الکترومغناطیسی عرضی.....

۲۲.....۲-۳-۲. سرعت فاز.....

۲۲.....۲-۳-۳. خواص مکانیکی.....

۲۳.....۲-۳-۴. امواج تخت تک رنگ.....

۲۳.....۲-۳-۵. شدت موج.....

۲۴.....۲-۴. قطبش.....

۲۴.....۲-۴-۱. قطبش بیضوی.....

۲۵.....۲-۴-۲. قطبش خطی.....

۲۵.....۲-۴-۳. قطبش دایروی.....

۲۶.....۲-۴-۴. قطبش بیضوی.....

۲۶.....۲-۴-۵. پارامترهای استوکس و کره پینکاره.....

۲۸.....۲-۴-۶. امواج غیر قطبیده و به طور جزئی قطبیده.....

۲۸.....۲-۵. حل تمرینات.....

فصل سوم: امواج در محیط مادی ..... ۳۱

۳-۱. امواج تخت ..... ۳۱

۳-۱-۱. امواج تخت تک رنگ ..... ۳۱

۳-۱-۲. امواج آلفون ..... ۳۲

۳-۱-۳. توازن انرژی در ماده ساده ..... ۳۳

۳-۲. بازتاب و شکست ..... ۳۳

۳-۲-۱. بازتاب آینه‌وار و قانون اسنل ..... ۳۴

۳-۲-۲. معادلات فرنل ..... ۳۵

۳-۲-۳. انتقال انرژی ..... ۳۶

۳-۲-۴. قطبش با بازتاب ..... ۳۶

۳-۲-۵. بازتابش کلی داخلی ..... ۳۷

۳-۲-۶. امواج تخت میراشونده غیریکنواخت ..... ۳۸

۳-۳. فشار تابشی ..... ۳۹

۳-۳-۱. پایداری ممتد در ماده ساده ..... ۴۰

۳-۳-۲. موج تخت هارمونیک زمانی ورودی ..... ۴۱

۳-۴. حل تمرینات ..... ۴۲

فصل چهارم: امواج در محیط‌های پراکنده ..... ۴۵

۴-۱. پراکندگی فرکانسی ..... ۴۵

۴-۱-۱. معادل سازی توصیف‌های جایگزین ..... ۴۵

۴-۲. انرژی در مواد پراکنده ..... ۴۶

۴-۲-۱. میدان‌های شبه تک فام ..... ۴۸

۴-۳. امواج طولی و عرضی ..... ۴۸

- ۴-۴. مدل‌های کلاسیک برای پراکندگی فرکانس..... ۴۹
- ۴-۴-۱. مدل درود برای ماده رسانا..... ۴۹
- ۴-۴-۲. امواج عرضی..... ۵۰
- ۴-۴-۳. امواج طولی..... ۵۱
- ۴-۴-۴. مدل لورنتس برای ماده دی‌الکتریک..... ۵۱
- ۴-۴-۵. مدل پلاسمای مغناطیده..... ۵۲
- ۴-۴-۶. مدل رینگ شکسته برای ماده‌ای با ضریب شکست منفی..... ۵۴
- ۴-۵. حل تمرینات..... ۵۶
- فصل پنجم: پتانسیل، میدان تاخیری و تابش ذرات باردار..... ۵۷**
- ۵-۱. پتانسیل..... ۵۷
- ۵-۲. میدان‌های تاخیری..... ۵۹
- ۵-۳. پتانسیل‌های Lienard – Wiechert..... ۵۹
- ۵-۴. میدان‌های Lienard – Wiechert..... ۶۱
- ۵-۵. میدان تولید شده توسط یک ذره باردار با حرکت یکنواخت..... ۶۲
- ۵-۶. تابش از یک ذره باردار شتاب‌دار در سرعت‌های پایین..... ۶۴
- ۵-۷. تابش از یک ذره باردار با سرعت و شتاب هم‌راستا..... ۶۵
- ۵-۸. تابش از یک ذره باردار محصور شده در حلقه چرخان..... ۶۷
- فصل ششم: آنتن‌ها..... ۶۸**
- ۶-۱. تابش ایجاد شده توسط ممان‌های دو قطبی..... ۶۸
- ۶-۲. تابش دو قطبی الکتریکی..... ۶۹
- ۶-۳. میدان‌های دو قطبی الکتریکی وابسته به زمان..... ۷۱
- ۶-۴. آنتن‌های خطی..... ۷۶



- ۶-۵. جهت گیری آنتن و سطح موثر..... ۸۰
- ۶-۶. تابش چهارقطبی الکتریکی..... ۸۲
- ۶-۷. آرایه آنتن..... ۸۷
- ۶-۸. تابش دوقطبی مغناطیسی..... ۹۰
- فصل هفتم : تداخل و هم‌دوسی..... ۹۳**
- ۷-۱. آزمایش وینر (wiener) و بردار نور..... ۹۳
- ۷-۲. شدت‌های هم‌دوس و ناهم‌دوس..... ۹۴
- ۷-۳. تابش تک رنگ..... ۹۷
- ۷-۴. تداخل با تقسیم جبهه موج..... ۹۸
- ۷-۵. تداخل با تقسیم دامنه..... ۱۰۱
- ۷-۶. طول هم‌دوسی و زمان هم‌دوسی..... ۱۰۲
- ۷-۷. چند روزنه‌ای و توری پراش..... ۱۰۴
- ۷-۸. انعکاس‌های چندگانه و تداخل سنج فابری - پرو..... ۱۰۶

# فصل اول : معادلات ماکسول

## ۱-۱-۱. مقدمه

الکترومغناطیس مربوط به رفتار میدان‌های  $E(r,t)$  و  $B(r,t)$  می‌باشد و توسط معادله زیر تشریح می‌شود:

$$F = q(E + v \times B) \quad (1.1)$$

یعنی ذره‌ای با بار  $q$  و سرعت  $v$  را در حضور میدان الکتریکی  $E$  و میدان مغناطیسی  $B$  به حرکت در می‌آورد. میدان‌های الکتریکی ساکن نیاز به جداسازی بار دارند و میدان‌های مغناطیسی ساکن (به غیر از ماده مغناطیسی) فقط در حرکت ثابت به بار نیاز دارند.

## ۱-۱-۱-۱. بار الکتریکی

یک اتم، مولکول یا جسم ماکروسکوپی خنثی، از طریق افزایش یا از دست دادن الکترون‌ها، که هر یک دارای بار  $-e$  هستند، بار خالص بدست می‌آورد. اگر بار پیوسته در واحد حجم یا چگالی بار حجمی به صورت  $\rho(r)$  تعریف شود، آنگاه  $dQ = \rho(r) d^3r$  مقدار بار موجود در حجم بی نهایت کوچک  $d^3r$  است. بار کل  $Q$  در حجم محدود  $V$  برابر است با:

$$Q = \int_V \rho(r) d^3r \quad (1.2)$$

در مکانیک کوانتومی اگر چگالی بار بر حسب توابع موج پیوسته یا تابع موج چند ذره  $(r_1, r_2, \dots, r_N)$  توصیف شود:

$$\rho(r) = q \int d^3r_2 \int d^3r_3 \dots d^3r_N |\Psi(r_1, r_2, \dots, r_N)|^2 \quad (1.3)$$

این نشان می‌دهد که  $r_S$ ، یک نقطه متمرکز بر روی یک عنصر بی نهایت کوچک از سطح  $dS$  می‌باشد و یک بار در چگالی بار سطحی،  $\sigma(r_S)$  برابر با  $dQ = \sigma(r_S) dS$  می‌باشد. بار کل مربوط به یک سطح محدود  $S$  برابر است با:

$$Q = \int_V dS(r_S) \quad (1.4)$$

همچنین چگالی بار  $N$  بار نقطه‌ای  $q_k$  در موقعیت‌های  $r_k$  برابر است با:

$$p(r) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(r - r_k) \quad (1.5)$$

با جایگزینی (۱.۵) در (۱.۲) شار کل، بدست می‌آید.

## ۱-۱-۲. جریان الکتریسته

بار الکتریکی در حرکت سازمان یافته، جریان الکتریکی نامیده می‌شود (شکل ۱-۱). بر حسب قیاس با جریان سیال،  $\hat{n}$  واحد موضعی نرمال برای عنصری از سطح  $dS$  است و  $dS = dS \hat{n}$  می‌باشد. اگر  $j(r, t)$ ، یک چگالی جریان باشد آنگاه

چگالی جریان می باشد. مجموع جریانی که از یک سطح محدود  $S$  می گذرد برابر است با:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S ds \cdot j \quad (1.6)$$

هنگامی که سرعت  $v(r,t)$  و چگالی بار  $\rho(r,t)$  مشخص باشد، می توان به یک فرمول دقیق برای  $j(r,t)$  رسید. بنابراین چگالی جریان برابر است با:

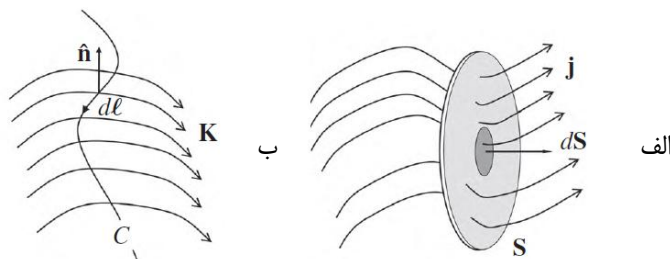
$$j = \rho v \quad (1.7)$$

اگر بار به طور کامل به یک سطح دو بعدی محدود شود، رابطه (۱.۷) با چگالی جریان سطحی جایگزین خواهد شد:

$$k = \rho v \quad (1.8)$$

شکل ۱-۱، نشان می دهد که جریانی که از منحنی  $C$  روی یک سطح می گذرد را می توان بر حسب سطح موضعی نرمال  $\hat{n}$  بیان کرد:

$$Q = \int_C dl \cdot k \times \hat{n} = \int_C k \cdot (\hat{n} \times dl) \quad (1.9)$$



شکل ۱-۱. الف) جریانی که از منحنی  $C$  روی یک سطح می گذرد را می توان بر حسب سطح موضعی نرمال  $\hat{n}$  بیان کرد. ب) جریانی که از منحنی  $C$  روی یک سطح می گذرد را می توان بر حسب سطح موضعی نرمال  $\hat{n}$  بیان کرد. خطی  $dl$  است.

### ۳-۱-۱. حفظ بار

بار الکتریکی به طور مطلق توسط تمام فرآیندهای فیزیکی شناخته شده، حفظ می شود و تنها راه برای تغییر بار خالص در حجم محدود، حرکت ذرات باردار به داخل یا خارج از آن حجم است. واکنش های شیمیایی، گونه های شیمیایی را ایجاد و نابود می کنند و فرآیندهای کوانتومی، ذرات بنیادی را ایجاد و از بین می برند، اما بار کلی قبل و بعد از هر یک از این رویدادها، همیشه یکسان است. مفیدترین بیانیه بقای بار با نمایش انتگرال سطحی جریان  $I$  در (۱.۶) آغاز می شود. اگر سطح  $S$  برای بسته شدن انتخاب شود، قضیه و اگرایی این امکان را می دهد که  $I$  را به عنوان یک انتگرال بر روی حجم  $V$  بیان کرد:

$$I = \int_V d^3r \nabla \cdot j \quad (1.10)$$

در روابط بالا، بار کل Q در حجم V کاهش می‌یابد. بنابراین داریم:

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3r p = -\int_V d^3r \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.11)$$

معادل سازی (۱.۱۰) و (۱.۱۱) برای یک حجم دلخواه، بیانیه موضعی پایستگی بار به نام معادله پیوستگی را بدست می‌آورد:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (1.12)$$

معادله پیوستگی می‌گوید که بار کل در هر حجم بینهایت کوچک، ثابت است مگر اینکه از قبل، یک جریان خالص بار در داخل یا خارج از حجم از طریق سطح آن، وجود داشته باشد.

## ۱-۲. معادلات ماکسول در خلاء

### ۱-۲-۱. الکترواستاتیک

با تعمیم بارهای نقطه‌ای، نیروی وارد بر بار q در نقطه r به دلیل N بار نقطه‌ای q<sub>k</sub> در نقاط r<sub>k</sub> توسط قانون کولن بدست می‌آید:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N q q_k \frac{r-r_k}{|r-r_k|^3} \quad (1.13)$$

با استفاده از چگالی بار نقطه‌ای (۱.۵)، می‌توان قانون کولن را مجدداً بیان کرد:

$$F = q E(r) \quad (1.14)$$

که در آن E(r)، میدان الکتریکی نامیده می‌شود:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' p(r') \frac{r-r'}{|r-r'|^3} \quad (1.15)$$

میدان الکتریکی تولید شده توسط توزیع بار دلخواه، مجموع برداری میدان‌های الکتریکی تولید شده توسط هر یک از قطعات تشکیل دهنده آن است. در نتیجه داریم:

$$\nabla \frac{1}{|r-r'|} = -\frac{r-r'}{|r-r'|^3} \quad \text{و} \quad \nabla^2 \frac{1}{|r-r'|} = -4\pi\delta(r-r') \quad (1.16)$$

برای نشان دادن آن کافی است که بنویسیم:

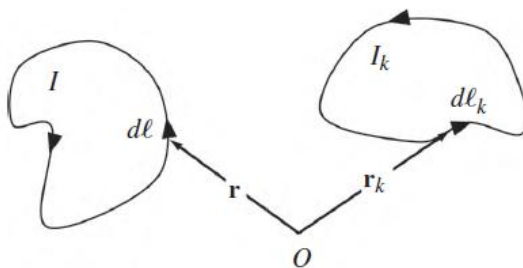
$$\nabla \cdot E = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{و} \quad \nabla \times E = 0 \quad (1.17)$$

معادله سمت چپ (۱.۱۷)، قانون گاوس است و این اولین معادله از چهار معادله ماکسول است. معادله سمت راست (۱.۱۷) فقط برای الکترواستاتیک معتبر است.

### ۱-۲-۲. مغناطیس استاتیک

نیروی وارد بر یک حلقه بسته حامل جریان  $I$  به دلیل وجود  $N$  حلقه های دیگر حامل جریان  $I_k$  (اگر  $r$  به عنصر خط  $d\ell$  حلقه  $I$  و  $r_k$  به عنصر  $d\ell_k$  از حلقه  $k$  ام اشاره کند (شکل ۱-۲))، طبق فرمول آمپر برابر است با:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I d\ell \cdot \sum_{K=1}^N \oint I_K d\ell_K \frac{r-r_k}{|r-r_k|^3} = \oint I d\ell \times B(r) \quad (1.18)$$



شکل ۱-۲. دو حلقه رشته‌ای، جریان  $I$  و  $I_k$  را حمل می‌کنند. بردارهای  $r$  و  $r_k$  به ترتیب به عناصر خط  $d\ell$  و  $d\ell_k$  اشاره می‌کنند.

یعنی میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I_K d\ell_K \times \frac{r-r_k}{|r-r_k|^3} \quad (1.19)$$

با جایگزینی  $\int d^3r j \rightarrow \oint I d\ell$ ، فرمول‌های معتبر برای مدارهای خطی به فرمول‌های معتبر برای توزیع حجم جریان تبدیل می‌شوند. بنابراین با تعمیم (۱.۱۹)، میدان مغناطیسی تولید شده توسط هر چگالی جریان مستقل از زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' j \times \frac{r-r'}{|r-r'|^3} \quad (1.20)$$

میدان مغناطیسی تولید شده توسط توزیع جریان ثابت، مجموع برداری میدان‌های مغناطیسی تولید شده توسط هر یک از قطعات تشکیل دهنده آن است. ویلیام تامسون از معادله بین حلقه های جریان و آهنربای دائمی ناشی از آمپر استفاده کرد تا نشان دهد که میدان مغناطیسی تولید شده توسط هر دو نوع منبع راضی کننده است:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times B = \mu_0 j \quad (1.21)$$

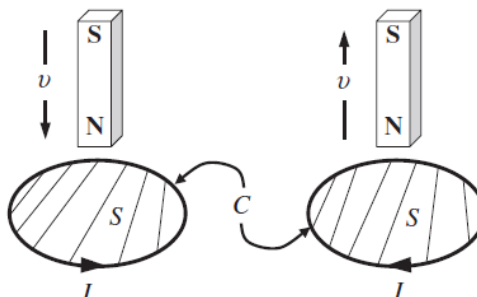
معادله سمت چپ (۱.۲۱)، دومین معادله ماکسول است و معادله سمت راست (۱.۲۱) که فقط برای مغناطیس استاتیکی معتبر است، قانون آمپر نامیده می‌شود.

### ۱-۲-۳. قانون فارادی

فارادی کشف کرد که هر زمان که شار مغناطیسی آن مدار تغییر کند، یک جریان الکتریکی گذرا از آن مدار عبور می‌کند (شکل ۱-۳). مشاهدات فارادی روی مدارهای با مقاومت  $R$  اعمال می‌شود، یعنی:

$$-\frac{d}{dt} \int_s ds \cdot B = IR \quad (1.22)$$

دامنه ادغام  $S$ ، سطحی است که منحنی مرزی آن با مدار منطبق باشد و قانون دست راست، جهت جریان شار را به جهت  $dS$  مرتبط می‌کند. در آن صورت، علامت منفی در (۱.۲۲)، قانون لنز را منعکس می‌کند یعنی جریان یک میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که با تغییر اصلی در شار مغناطیسی مخالف است.



شکل ۳-۱. یک آزمایش معمولی که قانون فارادی را نشان می‌دهد. هنگامی که آهنربای دائمی به سمت بالا یا پایین حرکت می‌کند، جریان در جهت مخالف در سیم رشته‌ای  $C$  جریان می‌یابد. ناحیه  $S$  توسط سیم  $C$  محدود شده است.

دانشمندان قرن نوزدهم، قانون اهم را برای جریان شار در مدار بسته  $C$ ، به این صورت درک کردند که :

$$IR = \oint_C d\ell \cdot E \quad (1.23)$$

مسیر  $C$  در (۱.۲۳)، سطح  $S$  را در (۱.۲۲) محدود می‌کند. بنابراین معادله سوم ماکسول با استفاده از (۱.۲۲) و (۱.۲۳) و قضیه استوکس شکل دیفرانسیل قانون فارادی بدست می‌آید :

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1.24)$$

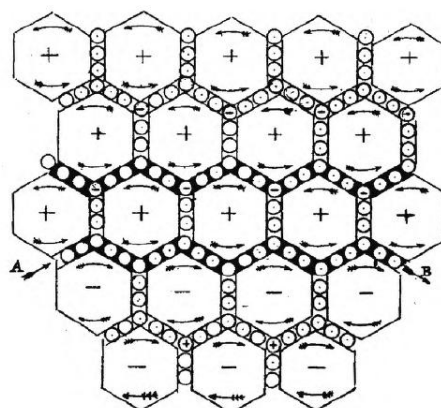
#### ۴-۲-۱. جریان جابجایی

جریان جابجایی سهم متعالی ماکسول در نظریه الکترومغناطیس است. ماکسول از یک مدل مکانیکی دقیق از گردابه‌های «مغناطیسی» دوار با بلبرینگ‌های توپ «الکتریکی» متقابل استفاده کرد (شکل ۴-۱) تا استدلال کند که چگالی جریان  $J$  در قانون آمپر باید با عبارت دیگری تکمیل شود، زمانی که میدان الکتریکی در زمان تغییر می‌کند. این جریان جابجایی است،  $J_D = \epsilon_0 \partial E / \partial t$  با وارد کردن این عبارت در (۱.۲۱)، معادله چهارم و نهمی ماکسول را بدست می‌آید که قانون آمپر-ماکسول نیز نامیده می‌شود :

$$\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.25)$$

اگر قانون آمپر و قانون گاوس با معادله پیوستگی (۱.۱۲) مطابقت داشته باشند، جریان جابجایی کاملاً ضروری است. این استدلال برای ماکسول در دسترس نبود، چون جریان الکتریکی را با بار الکتریکی در حرکت، مرتبط نمی‌دانست. ماکسول از مدل‌های مکانیکی صرف نظر کرد و در عوض،  $J_D$  را بدون انگیزه معرفی کرد (فقط اشاره کرد که این یکی از ویژگی‌های

اصلی نظریه است). تا اینکه هرگز امواج الکترومغناطیسی (در محدوده مایکروویو) را با تمام خواص پیش‌بینی شده توسط نظریه ماکسول کشف کرد.



شکل ۴-۱. طرح ماکسول از مدل مکانیکی گردابه‌های شش ضلعی دوار با بلبرینگ‌های درونی. او وجود جریان جابجایی را از مطالعه سینماتیک این دستگاه استنباط کرد. احتمالاً، این واقعیت که جریان جابجایی برای محلول‌های موجی که با سرعت نور منتشر می‌شوند، ضروری بود، او را به درستی اساسی آن متقاعد کرده بود. بقیه جهان در سال ۱۸۸۸ هنگامی که هرگز امواج الکترومغناطیسی (در محدوده مایکروویو) را با تمام خواص پیش‌بینی شده توسط نظریه ماکسول کشف کرد، متقاعد شدند.

### ۵-۲-۱. قرار دادن همه چیز در کنار هم

الکترومغناطیس کلاسیک مجموعه وسیعی از اطلاعات تجربی را با استفاده از مفاهیم چگالی بار  $\rho(r,t)$ ، چگالی جریان  $j(r,t)$ ، میدان الکتریکی  $E(r,t)$  و میدان مغناطیسی  $B(r,t)$  خلاصه می‌کند (معادلات ماکسول). با مشخص کردن نیرویی که  $\rho(r,t)$  و  $j(r,t)$  بر چگالی بار  $\rho^*(r,t)$  و چگالی جریان  $j^*(r,t)$  وارد می‌کنند، می‌توان قانون الکترواستاتیک کولن را به موقعیت‌های وابسته به زمان تعمیم داد (قانون نیروی کولن-لورنتس):

$$F(t) = \int d^3r [\rho^*(r,t)E(r,t) + j^*(r,t) \times B(r,t)] \quad (۱.۲۶)$$

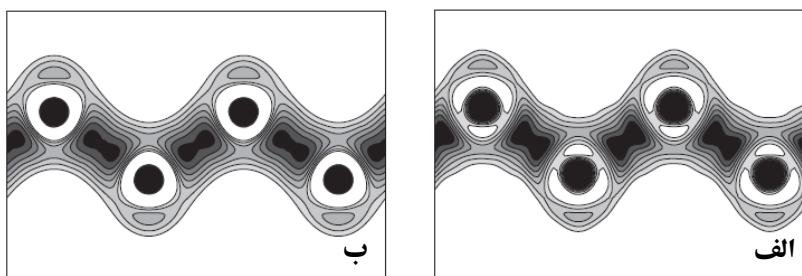
### ۳-۱. میکروسکوپی در مقابل ماکروسکوپی

هندریک لورنتس بیان کرد که اگر چگالی منبع  $\rho(r,t)$  و  $j(r,t)$  میکروسکوپی باشند، ممکن است معادلات ماکسول برای تجزیه و تحلیل پدیده‌های ماکروسکوپی در موقعیت‌های میکروسکوپی نیز اعمال شود. لورنتس یک مدل کلاسیک برای ماده خنثی بر اساس چگالی بار نقطه‌ای و چگالی جریان پیشنهاد کرد که به سرعت در مقیاس میکروسکوپی تغییر می‌کرد. او دریافت که تنها یک میانگین فضایی بیش از چنین تغییراتی می‌تواند به اندازه‌گیری‌های ماکروسکوپی مرتبط باشد، پس پیشنهاد کرد که نظریه ماکروسکوپی ماکسول را با میانگین‌گیری مناسب نسبت به نظریه میکروسکوپی او استخراج کند. اگر از عبارات مکانیکی کوانتومی برای چگالی بار و جریان استفاده شود، ایده لورنتس منطقی است. اما قبل از پرداختن به میانگین‌گیری باید تصورات لورنتس را ثابت کرد: یعنی الکترومغناطیس ماکسول زمانی معتبر است که منابع بار و جریان، میکروسکوپی باشند. شواهد قانع‌کننده برای اعتبار میکروسکوپی نظریه ماکسول از توافق بین آزمایش

و نظریه برای طیف هیدروژن اتمی، ناشی می‌شود. در معادله تک ذره‌ای دیراک، ترازهای انرژی حالت محدود برای یک الکترون می‌باشد که در میدان کولن کلاسیک یک پروتون حرکت می‌کند.

$$E(n, j) = mc^2 \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{(n-\delta)^2} \right]^{-1/2} \quad \delta = j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left( j + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2} \quad (1.27)$$

$m$  جرم کاهش یافته است،  $n$  و  $j$  اعداد کوانتومی تکانه زاویه‌ای اصلی و کل، و  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137$  ثابت ساختار ظریف است. امروزه محاسبه طیف و سایر خواص اتم‌ها، مولکول‌ها و جامدات با ترکیب نظریه میکروسکوپی ماکسول با مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی یا نسبیتی رایج است. محاسبات تقریبی هستند زیرا نمی‌توان بخش کوانتومی مسئله را دقیقاً برای سیستم‌های چند الکترونی حل کرد. با این وجود، تا هنگامی که تغییرات فضایی چگالی بار و پتانسیل الکترواستاتیکی به‌طور کامل حفظ شود، تطابق کمی با آزمایش، نرمال است (شکل ۵-۱). چگالی بار در سیلیکون کریستالی را که توسط پراش اشعه ایکس، اندازه‌گیری می‌شود با محاسبات مکانیکی کوانتومی با همان مقدار مقایسه می‌کند. آزمایش میدان‌های مغناطیسی با استفاده از مغناطیس‌های میکروسکوپی تطابق زیادی با محاسبات اصول اول برای مولکول‌های دیامغناطیس و جامدات فرومغناطیسی دارد. در واقع، تمام این شواهد نشان می‌دهند که معادلات ماکسول برای تمام مقیاس‌های طولی تا طول موج کامپتون الکترون  $\lambda_c = h/mc \approx 2.43 \times 10^{-12} \text{ m}$ ، معتبر هستند. برخلاف درجات آزادی فضایی، هیچ دلیل قانع‌کننده‌ای برای میانگین‌گیری در طول زمان در معادلات میکروسکوپی ماکسول وجود ندارد. دوره حرکت معمولی الکترون در اتم‌ها  $10^{-15}$  -  $10^{-16}$  ثانیه است. اگر این حرکت به‌طور میانگین در نظر گرفته می‌شود، هیچ نظریه سازگار ماکسولی در مورد تابش اشعه ماوراء بنفش یا اشعه ایکس وجود نداشت.



شکل ۵-۱. نمودار حدفاصل چگالی بار ظرفیتی سیلیکون کریستالی: الف.  $\rho(r)$  استخراج شده از داده‌های پراش اشعه ایکس. ب.  $\rho(r)$  محاسبه شده از محاسبات مکانیک کوانتومی و معادلات ماکسول. تکرار دوره‌ای هر یک از طرح‌ها در جهت عمودی و افقی یک صفحه از کریستال را ایجاد می‌کند. خطوط مستطیلی پیوند بین اتم‌ها (دایره‌های سیاه) را منعکس می‌کنند. نواحی سفید با چگالی بار ظرفیت بسیار کم گره‌ها را در توابع موج  $sp^3$  منعکس می‌کنند.

### ۱-۳-۱. میانگین‌گیری لورنتس

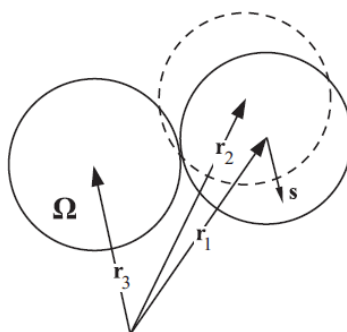
میانگین‌گیری فضایی لورنتس می‌تواند منابع و میدان‌های ماکروسکوپی (با تغییرات آهسته) را از منابع و میدان‌های میکروسکوپی با سرعت متغیر، تولید کند. طرح میانگین‌گیری یکسانی برای هر موقعیت فیزیکی وجود ندارد و مقیاس وضوح مورد نظر برای هر کدام از آنها، متفاوت است. میانگین‌گیری لورنتس ویژگی‌های مشخصی از نظریه ماکروسکوپی



را ایجاد می کند که در نظریه میکروسکوپی وجود ندارد. محاسبات مکانیکی کوانتومی بیانگر آن است که کمیت های میکروسکوپی مانند میدان الکتریکی  $E_{micro}(r,t)$  در مقیاس شعاع بور  $a_B$  متفاوت خواهند بود و تغییرات فضایی زمانی که در مقیاس وضوح بسیار بزرگتر از یک ناظر ماکروسکوپی مشاهده می شوند، به طور میانگین بدست می آیند. پس از روش سه مرحله ای زیر استفاده می شود: (۱) یک کره با حجم  $\Omega \gg a_B^3$  را در هر نقطه میکروسکوپی  $r$  مرکز قرار دهید (شکل ۱-۶). (۲) میانگین فضایی  $E_{micro}(r,t)$  را بر روی حجم کره بدست آورید:

$$E(r,t) = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} d^3s E_{micro}(s+r,t) \quad (1.28)$$

(۳) از این واقعیت استفاده کنید که  $E(r,t)$  به آرامی در مقیاس وضوح متغیر پیوسته  $r$ ، تغییر می کند و  $E(r,t)$  را با  $E(R,t)$  جایگزین می کند که در آن  $R$  یک متغیر فضایی با وضوح پایین است.



شکل ۱-۶. حجم های کروی در نقاط دلخواه در فضای  $r_1$ ،  $r_2$  و  $r_3$  متمرکز شده اند.

وضوح پایین یعنی فاصله بین دو نقطه همجوار در فضای  $R$  پیوسته به اندازه قطر کره میانگین است که در فضای  $r$  اندازه گیری می شود. بنابراین، نقاط دور  $r_1$  و  $r_3$  در شکل ۱-۶ به عنوان نقاط مجاور در فضای  $R$  عمل می کنند.  $E(R,t)$  میدان الکتریکی ماکروسکوپی است که به دنبال آن هستیم. برای یک گاز، یک قانون کلی برای کره میانگین وجود دارد که  $\Omega$  را در شکل ۱-۶ و در (۱.۲۸) برابر با چگالی معکوس اتم ها انتخاب کنند. برای یک کریستال،  $\Omega$  باید به عنوان حجم یک سلول واحد انتخاب شود. می توان یک میانگین فضایی اضافی از متغیر ماکروسکوپی  $E(R,t)$  را در مقیاس طولی بزرگتر که توسط وضوح فضایی یک کاوشگر تجربی یا با وسعت فضایی چگالی یا ناهمگنی های ترکیبی تعیین می شود، انجام داد. استفاده از (۱.۲۸) یا طرح جایگزین برای حذف تغییرات فضایی که در حجم متوسط رخ می دهد، مهم نیست اما الگوریتم میانگین مکانی باید یک عملیات خطی باشد. یعنی مشتقات مکانی و زمانی که در معادلات ماکسول ظاهر می شوند با میانگین گیری مکانی، جابجا می شوند. اگر از براکت های زاویه ای برای نشان دادن میانگین گیری کامل لورنتس استفاده کنیم، تأیید روابط زیر با استفاده از (۱.۲۸) دشوار نیست:

$$\nabla_R \times E(R) = \langle \nabla_r \times E_{micro}(r) \rangle \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial E_{micro}}{\partial t} \right\rangle \quad (1.30)$$

نتایج مشابهی برای  $\nabla_R \cdot E$  و مشتقات مکانی و زمانی  $B$  اعمال می‌شود، یعنی معادلات ماکسول چه در متغیرهای میکروسکوپی نوشته شده باشند و چه در متغیرهای ماکروسکوپی، شکل مشابهی دارند. استفاده از مقادیری که در میدان‌ها و منابع دوخطی هستند، ابر کوچکی در افق میانگین لورنتس ایجاد می‌کند. مثل، نیروی وارد بر چگالی بار  $\rho(r,t)$  و چگالی جریان  $j(r,t)$  در حجم  $V$  ناشی از میدان‌های الکترومغناطیسی  $E(r,t)$  و  $B(r,t)$ :

$$F = \int_V d^3r \{ \rho E + J \times B \} \quad (1.31)$$

رابطه (۱.۳۱) به عنوان یک فرمول میکروسکوپی، قانون نیروی لورنتس (۱.۱) را برای هر ذره میکروسکوپی بازتولید می‌کند. با این حال، به طور کلی  $\langle \rho E \rangle \neq \langle \rho \rangle \langle E \rangle$  و  $\langle J \times B \rangle \neq \langle J \rangle \times \langle B \rangle$ . برای محاسبه نیروی وارد بر یک جسم ماکروسکوپی فرض می‌کنیم که (۱.۳۱) در صورتی معتبر است که همه متغیرها به صورت ماکروسکوپی تفسیر شوند. تا هنگامی که  $F$  کل نیروی وارد بر یک نمونه جدا شده از ماده ماکروسکوپی در خلاء باشد، هیچ ابهامی وجود ندارد.

### ۲-۳-۱. سطح ماکروسکوپی

با انجام میانگین‌گیری در مجاورت یک سطح یا سطح مشترک، میانگین‌گیری لورنتس به طور اجتناب‌ناپذیری تکنیکی‌ها و ناپوستگی‌هایی در مقادیر ماکروسکوپی ایجاد می‌کند. چون مقادیر میکروسکوپی ورودی تغییرات فضایی سریعی را در نزدیکی سطوح، نشان می‌دهند که با تغییراتی که در جاهای دیگر رخ می‌دهد، مشخص نیست. برای اثبات این موضوع، قسمت بالای شکل ۷-۱ یک نقشه برجسته از چگالی بار الکترون میکروسکوپی، حالت پایه، چگالی بار الکترون ظرفیت  $\rho_0(z)$  در نزدیکی سطح صاف و کریستالی نقره فلزی در خلا را نشان می‌دهد. موج‌دار بودن خطوط  $\rho_0(z)$  در مجاورت ناحیه خلا (به سمت راست)، مشخصه رابط‌های خلا است. یکی دیگر از ویژگی‌های مشخصه هنگامی آشکار می‌شود که میانگین  $\rho_0(z)$  را روی سطوح موازی با سطح با مساحت  $A$  قرار دهیم. تابعی که بدست می‌آید، برابر است با:

$$\bar{\rho}_0(z) = \frac{1}{A} \int_A dx dy \rho_0(r) \quad (1.32)$$

$\bar{\rho}_0(z)$  در خلاء در فاصله‌ای قابل مقایسه با فاصله بین اتمی، به صفر می‌رسد. تغییر مقیاس که با میانگین‌گیری لورنتس در جهت  $z$  همراه است، وضوح خوب مورد نیاز برای مشاهده این رفتار را از بین می‌برد. پس لبه سطح ماکروسکوپی (خط عمودی جامد)، توزیع بار ماکروسکوپی را به طور ناپیوسته به صفر می‌رساند. حال اگر یک میدان الکتریکی افقی را عمود بر سطح و به سمت چپ اعمال شود یک اعوجاج در توابع موج الکترونی در مجاورت سطح  $Ag$ ، ایجاد می‌شود. اگر  $\bar{\rho}$  میانگین مسطح چگالی بار الکترونیکی در حضور میدان باشد و  $\sigma$  بار القایی در واحد سطح سطح باشد، تابع  $\lambda(z)$  برابر می‌شود با:

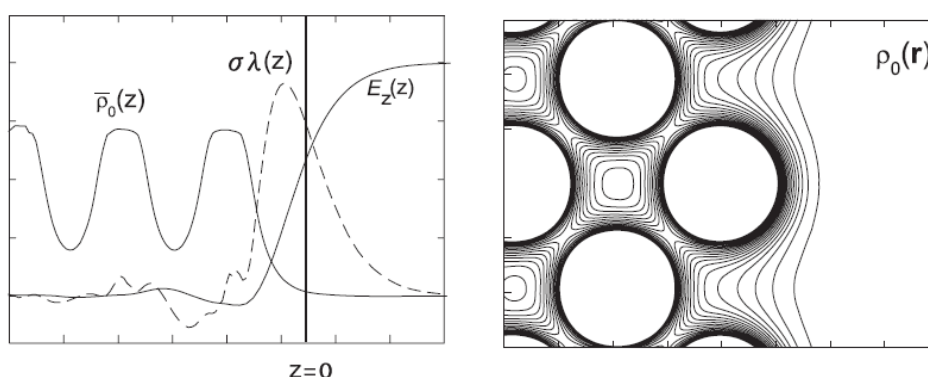
$$\bar{\rho}(z) = \bar{\rho}_0(z) + \sigma \lambda(z) \quad (1.33)$$

منحنی نقطه چین  $\sigma \lambda(z)$  در قسمت پایینی شکل ۷-۱ نشان می‌دهد که اثر اصلی میدان الکتریکی این است که مقداری بار الکترونیکی را از آخرین صفحه هسته دور می‌کند و به داخل خلا می‌رود. مقیاس افقی نشان می‌دهد که عرض منحنی

نقطه چین را نمی توان به صورت ماکروسکوپی حل کرد. بنابراین، پس از میانگین گیری لورنتس در جهت  $z$ ، تمام بار القایی در یک صفحه دو بعدی قرار می گیرد و تابع میکروسکوپی  $\sigma\lambda(z)$  را با یک تابع دلتای ماکروسکوپی منفرد جایگزین می کند:

$$\sigma\lambda(z) \rightarrow \sigma\delta(z) \quad (\text{میانگین گیری لورنتس}) \quad (1.34)$$

منحنی با برچسب  $E_z(z)$  در قسمت پایینی شکل ۷-۱، میانگین مسطح میدان الکتریکی میکروسکوپی در جهت عادی به سطح است.  $E_z(z)$  در خلا، غیر صفر است اما در ناحیه نزدیک به سطح به سرعت به صفر می رسد. بنابراین، نتیجه یک میانگین لورنتس در جهت  $z$ ، این است که میدان الکتریکی ماکروسکوپی در خارج از یک رسانای کامل به طور ناپیوسته به صفر در داخل یک رسانای کامل، کاهش می یابد.



شکل ۷-۱. نمای جانبی سطح آزاد فلز نقره کریستالی. خلاء در سمت راست قرار دارد. قسمت بالایی: نقشه برجسته چگالی بار الکترون ظرفیت  $\rho_0(r)$  در یک صفحه کریستالی عمود بر سطح. دایره های سفید نواحی با چگالی الکترونی بسیار بالا هستند که بر روی هسته اتم متمرکز شده اند. قسمت پایین: منحنی جامد با برچسب  $\bar{\rho}_0(z)$  برابر با  $\rho_0(r)$  است که در صفحات موازی با سطح به طور میانگین محاسبه می شود. ماکزیمم های موضعی این منحنی گرد شده و چگالی الکترون را در نزدیکی هسته ها به طور دقیق منعکس نمی کنند. منحنی چین دار با برچسب  $\sigma\lambda(z)$ ، میانگین مسطح تغییر چگالی الکترون ناشی از میدان الکتریکی به سمت چپ است. منحنی جامد با برچسب  $E_z(z)$ ، میانگین مسطح میدان الکتریکی عمود بر سطح ماکروسکوپی است.

### ۳-۳-۱. شرایط تطبیق

برای توصیف ارتباط بین میدان الکتریکی ناپیوسته و توزیع منفرد بار سطحی، باید صفحه  $z = 0$  دو ناحیه با برچسب  $L$  و  $R$  را از هم جدا کند.  $E_L(r)$  و  $\rho_L(r)$  میدان الکتریکی ماکروسکوپی و چگالی بار در ناحیه  $L$  هستند.  $E_R(r)$  و  $\rho_R(r)$  میدان الکتریکی ماکروسکوپی و چگالی بار در ناحیه  $R$  هستند. اکنون تابع گام  $\Theta(z)$  با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\Theta = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

با استفاده از این تابع می توانیم میدان الکتریکی را در هر نقطه از فضا به صورت زیر بنویسیم:

$$E(r) = E_R(r) \Theta(z) + E_L(r) \Theta(-z) \quad (1.36)$$

چگالی بار را می توان به طور مشابه نوشت با این تفاوت که باید چگالی بار سطحی  $\sigma(x, y)$  را که در  $z = 0$  موضعی شده است، در نظر گرفت. در نتیجه با استفاده از رابطه (۱.۳۴)، داریم:

$$\rho(r) = \rho_R(r) \Theta(z) + \rho_L(r) \Theta(-z) + \sigma \delta(z) \quad (1.37)$$

با توجه به قانون گاوس،  $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$ ، و اگرایی (۱.۳۶) برابر است با:

$$\nabla \cdot E = [\nabla \cdot E_R] \Theta(z) + [\nabla \cdot E_L] \Theta(-z) + \hat{z} \cdot (E_R - E_L) \delta(z) \quad (1.38)$$

از سوی دیگر،  $\nabla \cdot E_L = \rho_L/\epsilon_0$  و  $\nabla \cdot E_R = \rho_R/\epsilon_0$ . بنابراین، اگر (۱.۳۷) را برابر (۱.۳۸) ضربدر  $\epsilon_0$  قرار دهیم و برای نشان دادن ارزیابی  $E_L$  و  $E_R$  در نقاطی که در اطرف مقابل  $z = 0$  به یکدیگر نزدیک هستند، از براکت استفاده کنیم، نتیجه نهایی برابر است با:

$$\hat{z} \cdot [E_R - E_L] = \sigma/\epsilon_0 \quad (1.39)$$

این شرایط، ناپیوستگی در جزء طبیعی میدان الکتریکی میکروسکوپی را به بزرگی چگالی بار منفرد در سطح مشترک مرتبط می کند. سه شرط تطبیق اضافی به طور مشابه از سه معادله ماکسول، باقی مانده است. حالت کلی یک رابطه با چگالی بار سطحی  $\sigma(r_s)$  و چگالی جریان سطحی  $K(r_s)$  است. اگر  $\hat{n}_1$  به سمت خارج از ناحیه ۱ و  $\hat{n}_2$  به سمت خارج از ناحیه ۲ اشاره کند (شکل ۶-۱)، مجموعه کامل شرایط تطبیق برابر است با:

$$\begin{cases} \hat{n}_2 \cdot [E_1 - E_2] = \sigma/\epsilon_0 \\ \hat{n}_2 \cdot [B_1 - B_2] = 0 \\ \hat{n}_2 \times [E_1 - E_2] = 0 \\ \hat{n}_2 \times [B_1 - B_2] = \mu_0 K \end{cases} \quad (1.40)$$

دو معادله میانی در (۱.۴۰) بیانگر این است که مولفه نرمال  $B(r, t)$  و مولفه مماسی  $E(r, t)$  در سطح مشترک، پیوسته هستند. آخرین معادله در (۱.۴۰) نشان می دهد که مولفه مماسی  $B(r, t)$  از ناپیوستگی متناسب با چگالی جریان سطح موضعی، رنج می برد. هنگامی که رابطه با سرعت  $v$  حرکت می کند، یک عبارت اضافی به دو شرط آخر (۱.۴۰)، اضافه می شود:

$$\begin{cases} \hat{n}_2 \times [E_1 - E_2] - (v \cdot \hat{n}_2)[B_1 - B_2] = 0 \\ \hat{n}_2 \times [B_1 - B_2] + \frac{(v \cdot \hat{n}_2)}{c^2} \times [E_1 - E_2] = \mu_0 K \end{cases} \quad (1.41)$$

#### ۴-۱. معادلات ماکسول در ماده

ویلیام تامسون دریافت که میدان مغناطیسی  $B$  تولید شده توسط القای فارادی با میدان القا شده در ماده توسط یک جریان خارجی ثابت، متفاوت است. به طور مشابه، ماکسول دریافته بود که میدان الکتریکی  $E$  که مسئول نیروی وارد بر یک جسم باردار است، با میدانی که توسط یک بار خارجی در ماده ایجاد می شود، تفاوت دارد. تمایز بین  $B$  و  $H$  تامسون و  $E$

و  $D$  ماکسول، هنگامی به وجود می آید که میدان‌های تولید شده توسط بار و چگالی جریان ماده را از میدان‌های تولید شده توسط منابع بیرونی ماده، تشخیص دهیم.

#### ۱-۴-۱. منابع و میدان‌های ماکروسکوپی

چگالی بار ماکروسکوپی در هر نقطه در داخل یک نمونه جدا شده از ماده خنثی، صفر است. همین امر در مورد چگالی جریان ماکروسکوپی نیز برقرار است. اگر چگالی‌های آزاد بار و جریان،  $\rho_f(r, t)$  و  $j_f(r, t)$  را معرفی کنیم که کاملاً خارج از ماده هستند. آنگاه میدان‌های تولید شده توسط منابع بیرونی، باعث سازماندهی مجدد بار و شار جریان در ماده دی‌الکتریک و شار جریان در ماده مغناطیسی می‌شوند. میدان‌های تولید شده توسط این منابع القایی به کل میدان در داخل و خارج از ماده، کمک می‌کنند. برای مشخص کردن قطبش دی‌الکتریک از یک میدان برداری  $P(r, t)$  استفاده می‌شود و برای مشخص کردن مغناطش آهنربا از یک میدان برداری  $M(r, t)$  استفاده می‌شود. این مقادیر با نوشتن رابطه زیر وارد نظریه ماکسول می‌شود:

$$\rho(r, t) = \rho_f(r, t) - \nabla \cdot P(r, t) \quad (1.42)$$

$$j(r, t) = j_f(r, t) - \nabla \times M(r, t) + \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} \quad (1.43)$$

اکنون میدان‌های ماکروسکوپی معرفی شده توسط ماکسول و تامسون به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D(r, t) = \epsilon_0 E(r, t) + P(r, t) \quad (1.44)$$

$$H(r, t) = \mu_0^{-1} B(r, t) - M(r, t) \quad (1.45)$$

هنگامی که معادلات (۱.۴۲) و (۱.۴۳) در معادلات ماکسول قرار گیرند، معادلات حاصل از میدان‌های ماکروسکوپی (ماکسول و تامسون) برابر می‌شوند با:

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times B = \rho_f \quad (1.46)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \nabla \times H = j_f + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (1.47)$$

بنابراین اولین و آخرین شرایط تطبیق در (۱.۴۰) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} \hat{n}_2 \cdot [D_1 - D_2] = \sigma_f \\ \hat{n}_2 \times [H_1 - H_2] = K_f \end{cases} \quad (1.48)$$

معادلات (۱.۴۶) و (۱.۴۷) برای تعیین مجموعه معادلات، کافی نیستند و باید از روابط  $D = D\{E, B\}$  و  $H = H\{E, B\}$  استفاده کرد. هنگامی که قدرت میدان کم است، یک تقریب خطی، معتبر است. در حد استاتیک، این گذردهی دی‌الکتریک و نفوذپذیری مغناطیسی  $\mu$ ، الکتروپنایمیک ماکروسکوپی را تعریف می‌کند:

$$D(r) = \epsilon E(r) \quad B(r) = \mu H(r) \quad (1.49)$$

به طور معادل، می توان از حساسیت الکتریکی  $\chi$  و حساسیت مغناطیسی  $\chi_m$  استفاده کرد :

$$P(r) = \epsilon_0 \chi E(r) \quad B(r) = \chi_m H(r) \quad (1.50)$$

## ۲-۴-۱. میدان های میکروسکوپی

در مقیاس میکرو، معادلات ماکروسکوپی بخش قبل، معتبر باقی نمی ماند ( مثل رابطه (۱.۴۹) که نادرست بودن آن برای کاربردهای میکروسکوپی، شناخته شده است). در واقع، به جای استفاده از  $D_z(z) = \epsilon E_z(z)$  یا  $D_z(z) = \epsilon E_z(z)$ ، میدان  $E_z(z)$  ترسیم شده در قسمت پایینی شکل ۷-۱ با استفاده از یک تابع دی الکتریک غیر موضعی ( $z$ ) محاسبه شد که به میدان در یک نقطه از فضا اجازه می دهد تا در نقاط نزدیک در فضا بر میدان تأثیر بگذارد :

$$D_z(z) = \int dz' \epsilon(z, z') E_z(z') \quad (1.51)$$

با جایگزینی (۱.۵۱) در  $\nabla \cdot D = 0$  داریم :

$$\frac{d}{dz} \int dz' \epsilon(z, z') E_z(z') = 0 \quad (1.52)$$

که با معادله زیر ادغام می شود :

$$\frac{d}{dz} \int dz' \epsilon(z, z') E_z(z') = E_z(\infty) \quad (1.53)$$

که در آن،  $E_z(\infty)$  میدان دور از سطح (در خلاء) است. با دستبایی به یک تابع صاف و پیوسته در شکل ۷-۱، مشخص می شود که معادله (۱.۵۳) یک معادله انتگرالی برای  $E_z(z)$  است.

## ۲-۵-۱. فیزیک جدید و محدودیت های کوانتومی

دامنه الکترومغناطیس کلاسیک بسیار بزرگ است، اما بی نهایت نیست. حدود شناخته شده این نظریه توسط مکانیک کوانتومی تعیین می شود و محدودیت های ناشناخته این نظریه با کشف احتمالی فیزیک جدید، تعیین می شود که این نظریه را ناقص می کند.

### ۱-۵-۱. ماده کوانتیزه شده

الکترومغناطیس کلاسیک، تئوری میدان الکترومغناطیسی و برهمکنش آن با ماده است. هنگامی که اثرات کوانتومی شروع به اثبات خود می کنند، مشکلات در مقیاس خرد به وجود می آیند و راه حل آن یک توصیف نیمه کلاسیک است. البته این محاسبات، نتایج دقیق کمی را برای سرعت جذب/گسترش امواج الکترومغناطیسی توسط ماده و برای سرعت آزاد شدن الکترون ها از ماده توسط تابش نور ایجاد می کند.

### ۲-۵-۱. قطبش خلاء

نظریه ماکسول، حد کلاسیک الکترو دینامیک کوانتومی است که در آن ذرات باردار و میدان‌های الکترومغناطیسی در شرایطی برابر با اجسام کوانتومی در نظر گرفته می‌شوند. این دقیق‌ترین نظریه در مورد طبیعت است. مثلاً قطبش خلاء که تحریک جفت الکترون-پوزیترون در حضور یک میدان الکترومغناطیسی خارجی است. اگر میدان خارجی توسط یک بار نقطه‌ای ساکن  $q$  تولید شود، این اثر کوانتومی نسبتی قانون کولن را در فواصل کمتر از طول موج کامپتون الکترون،  $\lambda_c = h/mc$  اصلاح می‌کند. کمترین مرتبه در ساختار ثابت  $\alpha = e^2/2\epsilon_0 hc$ ، نتیجه QED برای پتانسیل الکترواستاتیکی یک بار نقطه‌ای زیر است:

$$\varphi(r) = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 1 - \frac{2\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{r}{\lambda_c}\right) & r/\lambda_c \ll 1 \\ 1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \ln\left(\frac{r}{\lambda_c}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{2r}{\lambda_c}} & r/\lambda_c \gg 1 \end{cases} \quad (1.54)$$

می‌توان رفتار  $q(r)$  را به عنوان قیاس کوانتومی غربالگری بار نقطه‌ای  $q$  توسط محیطی با گذردهی دی‌الکتریک  $\epsilon = \epsilon_0 k$  تفسیر کرد. در یک محیط دی‌الکتریک، بار قطبش در مجاورت منبع، مقدار موثر بار را از  $q$  به  $q/k$  کاهش می‌دهد و سپس بار لخت واگرا  $q(0)$  با جذب الکترون‌ها و دفع پوزیترون‌ها، خلاء را در مجاورت آن قطبی می‌کند. هنگامی که از فواصل  $\lambda_c \gg r$  مشاهده می‌شود، مقدار موثر بار چشمه، دوباره به مقدار محدود  $q$  برمی‌گردد. اثرات قطبش خلاء وقتی قابل توجه می‌شود که قدرت میدان خارجی به مقدار زیر نزدیک شود:

$$\begin{cases} P = -\frac{2\epsilon_0\alpha}{E_c^2} \{2(E^2 - c^2B^2)E + 7c^2(E \cdot B)B\} \\ M = \frac{2\alpha}{\mu_0 E_c^2} \{2(E^2 - c^2B^2)E + 7(E \cdot B)E\} \end{cases} \quad (1.55)$$

بنابراین هنگامی که قدرت میدان نزدیک شود، خطی بودن معادلات خلاء ماکسول و اصل برهم نهی از کار می‌افتد. این نتیجه QED (معتبر برای میدان‌های با تغییرات آهسته) را می‌توان به شکل روابط سازنده غیرخطی برای خلاء به کار برد. کمترین مرتبه در  $\alpha$ ، یک قطبش  $P$  و یک مغناطش  $M$  ایجاد می‌کند:

$$\begin{cases} P = -\frac{2\epsilon_0\alpha}{E_c^2} \{2(E^2 - c^2B^2)E + 7c^2(E \cdot B)B\} \\ M = \frac{2\alpha}{\mu_0 E_c^2} \{2(E^2 - c^2B^2)E + 7(E \cdot B)E\} \end{cases} \quad (1.56)$$

### ۳-۵-۱. نوسانات کوانتومی

از آنجا که  $E(r,t)$  و  $B(r,t)$  عملگرهای برداری غیرقابل جابه‌جایی در QED هستند، یک محدودیت متفاوت در اعتبار الکترو دینامیک کلاسیک به وجود می‌آید. طبق اصل عدم قطعیت، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی نمی‌توانند همزمان مقادیر واضحی به خود بگیرند و نوسانات کوانتومی دامنه‌ها و فازهای میدان همیشه حتی در حالت خلاء وجود دارند. از سوی دیگر، میدان‌های تولید شده توسط منابع ماکروسکوپی همواره نوسانات غیرکوانتومی را نیز نشان می‌دهند. روش غیر

کلاسیک اپتیک کوانتومی هنگامی پدیدار می شود که نوسانات کلاسیک سرکوب شوند تا نوسانات کوانتومی آشکار شوند. تشخیص میدان الکترومغناطیسی کلاسیک از میدان الکترومغناطیسی کوانتومی با تمرکز بر عملگر شدت میدان (متوسط زمانی)  $\hat{I}$  و مقادیر چشم‌داشتی مانند  $g^2 = \langle \hat{I}^2 \rangle / \langle \hat{I} \rangle^2$  امکان پذیر است. شدت میدان یک کمیت مثبت است، بنابراین نوسانات کلاسیک یا کوانتومی باشند باز هم رابطه  $g^{(2)} \geq 0$  برقرار است. اما برای میدان‌های توصیف شده توسط الکتروپدینامیک کلاسیک، نابرابری شدیدتر  $g^{(2)} \geq 1$  برقرار است. اثرات کوانتومی هنگامی خود را نشان می‌دهند که از حد ماکروسکوپی بسیاری از اتم‌ها به حد میکروسکوپی یک یا چند اتم برسند، یعنی یک اتم منفرد، منبع خوبی برای تابش غیر کلاسیک است. پارامتر  $\tau$  انتقال، نرمالیزه شده است. وقتی  $\Delta \approx 0$ ، اتم‌ها به صورت تشدیدکننده، نور لیزر را پراکنده می‌کنند و با طول عمر تابشی  $\tau$  انتقال، نرمالیزه شده است. البته با افزایش میزان جداسازی  $\Delta$ ، اتم‌ها کمتر پراکنده می‌شوند. بنابراین کاراکتر عملگر متغیرهای میدان، نقش اساسی در توصیف نور ارسالی دارد.

#### ۴-۵-۱. بار مغناطیسی

معادلات ماکسول، نامتقارن هستند.  $\nabla \cdot E$  با چگالی بار الکتریکی  $\rho$  متناسب است اما  $\nabla \cdot B$  با چگالی بار مغناطیسی  $\rho_m$ ، متناسب نیست. به طور مشابه، یک چگالی جریان الکتریکی  $j$  در قانون آمپر-ماکسول، ظاهر می‌شود اما هیچ چگالی جریان مغناطیسی  $j_m$  در قانون فارادی، دیده نمی‌شود. اما بسیاری از فیزیکدانان با این فرض که بار مغناطیسی وجود دارد و حرکت ذرات با بار مغناطیسی یک چگالی جریان مغناطیسی ایجاد می‌کند و سپس  $\nabla \cdot j_m + (\partial \rho_m / \partial t) = 0$  را برآورده می‌کند، توانستند معادلات ماکسول را متقارن کنند. اگر به طور موقت  $\rho_e$  و  $j_e$  به عنوان چگالی بار الکتریکی و چگالی جریان معرفی شوند، این فرضیات،  $\nabla \cdot B = 0$  و  $\nabla \cdot E = \rho / \epsilon_0$  را به معادلات زیر تعمیم می‌دهد:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \nabla \times B = \mu_0 \rho_m \quad (1.57)$$

$$\nabla \times E = -\mu_0 j_m - \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad \nabla \times B = \mu_0 j_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.58)$$

اصطلاحات جدید از چگالی نیروی کولن - لورنتس تعمیم یافته مشابهی، معنا پیدا می‌کنند:

$$f = (\rho_e E + j_e \times B) + (\rho_m B + j_m \times E / c^2) \quad (1.59)$$

جالب‌ترین ویژگی معادلات (۱.۵۷)، (۱.۵۸) و (۱.۵۹) این است که آن‌ها نسبت به تبدیل دوگانه میدان‌ها و چشمه‌ها با زاویه  $\theta$ ، تغییر ناپذیر هستند:

$$E' = E \cos \theta + cB \sin \theta \quad cB' = -E \sin \theta + cB \cos \theta \quad (1.60)$$

$$c\rho_e' = c\rho_e \cos \theta + \rho_m \sin \theta \quad \rho_m' = -c\rho \sin \theta + \rho_m \cos \theta \quad (1.61)$$

$$cj_e' = cj_e \cos \theta + j_m \sin \theta \quad j_e' = -cj_e \sin \theta + j_m \cos \theta \quad (1.62)$$



این بدان معناست که  $E'$ ،  $B'$ ،  $\rho_e'$ ،  $\rho_m'$  و  $j_e'$  معادلات مشابهی را برآورده می کنند و تنها محدودیت ها، آنهایی هستند که توسط خود تبدیل، تحمیل می شوند:

$$c^2 \rho_e'^2 + \rho_m'^2 = c^2 \rho_e^2 + \rho_m^2 \quad (1.63)$$

دوگانگی یعنی اینکه یک ذره فقط بار الکتریکی دارد یا فقط بار مغناطیسی دارد و یا مخلوطی از این دو را خواهد داشت.

### ۱-۶. واحدهای SI

نظریه الکترومغناطیس ماکسول، باعث توسعه اصطلاحات و سیستم های عملی در دو رشته الکتریسته و مغناطیس شد. برجسته ترین سیستم های امروزی، سیستم های SI و سیستم های گاوسی (G) هستند. سیستم SI طوری طراحی شده است که اطمینان حاصل شود که انرژی مکانیکی و انرژی الکتریکی دقیقاً در واحدهای مشابه اندازه گیری می شوند. برای این منظور، متر (m)، کیلوگرم (kg) و ثانیه (s) به عنوان واحدهای پایه مستقل برای طول، جرم و زمان تعریف می شوند و واحد نیرو، نیوتن می باشد ( $N = kg \cdot m/s^2$ ). با اعمال این گزینه ها به نیروی وارد بر بار نقطه ای  $q_2$  به دلیل وجود بار نقطه ای  $q_1$  در فاصله  $r$ ، داریم:

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = q_1 E \quad (1.64)$$

سمت راست رابطه (1.64)،  $E = k_e q_2 / r^2$  را به عنوان بزرگی میدان الکتریکی شعاعی در فاصله  $r$  از بار نقطه ای  $q_2$  تعریف می کند. مورد بعدی، نیروی وارد بر طول  $L_2$  سیم مستقیم حامل جریان  $I_2$  به دلیل وجود سیم موازی با جریان  $I_1$  در فاصله  $d$  است:

$$F_m = k_m \frac{2I_1 I_2 L_2}{r^2} = I_1 L_2 B \quad (1.65)$$

سمت راست رابطه (1.65)،  $B = 2k_m I_2 / d$  را به عنوان بزرگی میدان مغناطیسی محیطی در فاصله  $d$  از یک سیم حامل جریان  $I_2$  تعریف می کند. واحد بار مشتق شده، کولن ( $C = A \cdot s$ ) است زیرا  $I = dq/dt$ ، بار و جریان را به هم مرتبط می کند. بنابراین  $E/B$  دارای ابعاد سرعت است و  $k_e/k_m$  یک ثابت با ابعاد (سرعت) است. این حقایق تمام چیزی است که برای نوشتن فرم های صحیح ابعادی برای قانون نیروی لورنتس، نیاز داریم:

$$F = q(E + v \times B) \quad (1.66)$$

و معادلات ماکسول:

$$\nabla \cdot E = 4\pi k_e \rho \quad \nabla \times B = 0 \quad (1.67)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \nabla \times B = 4\pi k_m j + \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1.68)$$

حضور فاکتورهای  $4\pi$  تضمین می کنند که این معادلات، میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی را باز تولید می کنند. در ادامه،  
 $\rho = j = 0$  در (۱.۶۸) قرار می گیرند و از رابطه  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla^2 \mathbf{F} + \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{F})$  استفاده می شود:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{k_m}{k_e} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.69)$$

این معادلات راه حل های موج مانندی دارند که اگر  $k_e/k_m = c^2$  باشد، با سرعت نور  $c$  منتشر می شوند.

## فصل دوم : امواج در خلاء

### ۲-۱. مقدمه

معادلات ماکسول دارای راه‌حل‌های موج ماندی است که از نقطه‌ای به نقطه دیگر در فضا منتشر می‌شود و حامل انرژی، تکانه خطی و تکانه زاویه‌ای است. این راه‌حل‌های انتشاری، میدان‌های آزاد نامیده می‌شوند، زیرا به توزیع بار یا جریان، متصل نیستند. امواج الکترومغناطیسی راه حل معادلات ماکسول در غیاب منبع هستند و همچنین راه حل یک معادله موج برداری هستند. معادلات ماکسول در محیط بدون چشمه ( $\rho = j = 0$ ) عبارتند از :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.2)$$

دو معادله کرل، معادلات دیفرانسیل جزئی برای تکامل زمانی  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  و  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  هستند. دو معادله واگرایی شرایط اولیه را فراهم می‌کنند و این از واگرایی هر معادله کرل بدست می‌آید :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\nabla \cdot \mathbf{E}\} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t} \{\nabla \cdot \mathbf{B}\} = 0 \quad (2.3)$$

### ۲-۲. معادله موج

میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به طور مستقل یک نسخه برداری از معادله موج کلاسیک را برآورده می‌کنند. برای اثبات، معادله سمت چپ (۲.۲) جایگزین معادله سمت راست (۲.۲) می‌شود (و بالعکس) :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{و} \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

بردار جابجایی  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  و معادله (۲.۱)، معادله (۲.۴) را به معادله موج برداری تبدیل می‌کند:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{و} \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

### ۲-۲-۱. پتانسیل‌های پیمانه‌ای لورنتس

اگر میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر حسب توابع پتانسیل به صورت زیر باشند :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{و} \quad \mathbf{E} = \nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.6)$$

و شرایط پیمانه‌ای لورنتس برابر باشد با :

$$\nabla^2 A_L + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = 0 \quad (2.7)$$

آن‌گاه برای تکامل زمانی آن‌ها به معادلات موج زیر می‌رسیم :

$$\nabla^2 \varphi_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi_L}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 A_L - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_L}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

پتانسیل‌هایی که (۲.۷) و (۲.۸) را برآورده می‌کنند، میدان‌های (۲.۶) را ایجاد می‌کنند که هر چهار معادله ماکسول را در فضای آزاد، برآورده می‌کند. مثلاً اگر  $A_L(r,t) = u(r,t) s$  در (۲.۸) قرار گیرد، داریم :

$$[\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}] s = 0 \quad (2.9)$$

که نشان‌دهنده تمامی پاسخ‌های معادله موج اسکالر است :

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

این پتانسیل برداری پیمانه‌ای لورنتس برابر با سمت راست معادله (۲.۸) می‌باشد. همچنین خطی بودن معادله موج تضمین می‌کند که پتانسیل اسکالر حاصل از (۲.۷) و (۲.۸)، سمت چپ معادله (۲.۸) را بدست می‌آورد :

$$\varphi_L(r,t) = -c^2 s \int_{-\infty}^t dt' \nabla u(r,t') \quad (2.11)$$

بنابراین، هر راه حل معادله موج اسکالر مجموعه‌ای از امواج الکترومغناطیسی (۲.۶) را ایجاد می‌کند.

## ۲-۲-۲. پتانسیل‌های پیمانه‌ای کلمب

یک جایگزین برای (۲.۷)، محدودیت پیمانه‌ای کلمب است :

$$\nabla \cdot A_c = 0 \quad (2.12)$$

این انتخاب، معادله حرکت را برای پتانسیل‌های زیر ساده می‌کند :

$$\nabla^2 \varphi_c = 0 \quad \nabla^2 A_c - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_c}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \varphi A_c}{\partial t} \quad (2.13)$$

در فضای بی نهایت آزاد، ممکن است  $\varphi_c(r,t) = 0$  را بدون از دست دادن کلیت مسئله، تنظیم کنیم چون در این حالت حل معادله لاپلاس، یک ثابت است. بنابراین، تا وقتی که (۲.۱۲) برقرار است، معادله موج به صورت زیر است :

$$\nabla^2 A_c - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_c}{\partial t^2} = 0 \quad (2.14)$$

و هر چهار معادله ماکسول در رابطه زیر صدق می‌کند :

$$B = \nabla \times A_c \quad \text{و} \quad E = -\frac{\partial A_c}{\partial t} \quad (2.15)$$

## ۲-۳. امواج تخت

یکی از مهم‌ترین راه‌های معادله موج، امواج تخت می‌باشد و برای یافتن آن، یک معادله موج برداری می‌نویسیم:

$$\nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۲.۱۶)$$

به دنبال راه حلی هستیم که به یک متغیر فضایی منفرد، بستگی دارد. برای مثال،  $w = w(z, t)$  در معادله بالا را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left( \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) w = 0 \quad (۲.۱۷)$$

متغیرها را به  $\xi = z + ct$  و  $\eta = z - ct$  تغییر می‌دهیم و از قانون زنجیره‌ای برای محاسبه مشتقات استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right] \quad (۲.۱۸)$$

از مقایسه (۲.۱۷) و (۲.۱۸) به این نتیجه می‌رسیم که:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \quad (۲.۱۹)$$

اگر  $f$  و  $g$  توابع دلخواهی از یک متغیر اسکالر باشند، انتگرال‌گیری مستقیم (۲.۱۹) نشان می‌دهد که  $w(\xi) = f(z + ct)$  و  $w(\eta) = g(z - ct)$ ، راه‌حل‌های مستقل خطی هستند.  $g(z - ct)$  مقادیر ثابتی را در صفحات  $z - ct = \text{const}$  می‌گیرد که با سرعت  $c$  در جهت  $z$  مثبت منتشر می‌شوند و  $f(z + ct)$  مقادیر ثابتی را در صفحات  $z + ct = \text{const}$  می‌گیرد که با سرعت  $c$  در جهت  $z$  منفی منتشر می‌شوند. جواب کلی (۲.۱۶)، ترکیبی خطی از امواج تخت است که در جهت مخالف هم منتشر می‌شوند و دارای مشخصات موج ایستاده هستند:

$$w(z, t) = g(z - ct) + f(z + ct) \quad (۲.۲۰)$$

### ۱-۳-۲. امواج الکترومغناطیسی عرضی

با توجه به رابطه (۲.۱۴) به این نتیجه می‌رسیم که امواج صفحه‌ای برای  $E = E(z, t)$  و  $B = B(z, t)$ ، اجزای تشکیل دهنده یک موج الکترومغناطیسی هستند. می‌توان یک میدان الکتریکی معتبر ساخت و با استفاده از رابطه (۲.۲)، میدان مغناطیسی مرتبط را استخراج کرد. پس  $E(z, t)$  در تمامی نقاط صفحه‌ی  $x-y$  یکسان است:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = c^2 \hat{z} \cdot \nabla \times B = 0 \quad (۲.۲۱)$$

بنابراین دو راه حل مشتق خطی انتشار موج صفحه‌ای برای میدان الکتریکی به صورت زیر می‌باشد:

$$E_+(z, t) = f_{\perp}(z + ct) \quad \text{و} \quad E_-(z, t) = g_{\perp}(z - ct) \quad (۲.۲۲)$$

$E_{\pm}(z, t)$  و  $B_{\pm}(z, t)$  طبق رابطه  $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ ، به هم مرتبط هستند. از آنجا که  $E_z = 0$ ، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} B_+(z,t) \\ B_-(z,t) \end{Bmatrix} = -\hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} f_{\perp}(z+ct) \\ g_{\perp}(z-ct) \end{Bmatrix} = -\hat{z} \times \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} f_{\perp}(z+ct) \\ g_{\perp}(z-ct) \end{Bmatrix} \quad (۲.۲۳)$$

با انتگرال گیری جملات اول و آخر رابطه (۲.۲۳)، میدان مغناطیسی در راستای  $z$  بدست می آید:

$$cB_+(z,t) = -\hat{z} \times f_{\perp}(z+ct) \quad \text{و} \quad cB_-(z,t) = -\hat{z} \times g_{\perp}(z-ct) \quad (۲.۲۴)$$

امواج صفحه‌ای  $(E_+, B_+)$  و  $(E_-, B_-)$ ، میدان‌های الکترومغناطیسی عرضی (TEM) هستند زیرا هر دو بر  $\hat{z}$  عمود هستند. بنابراین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بر هم عمود هستند:

$$E_+ \cdot B_+ = 0 \quad \text{و} \quad B_- \cdot B_- = 0 \quad (۲.۲۵)$$

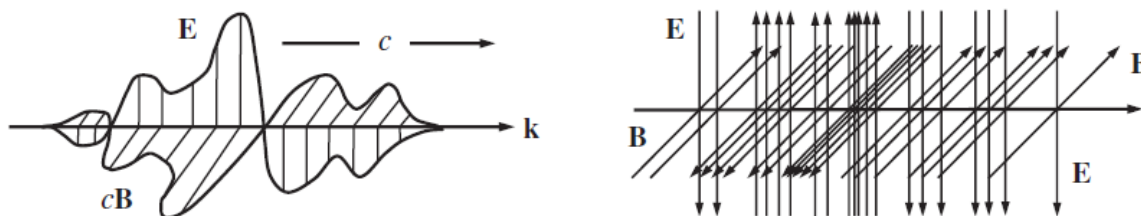
از سوی دیگر،  $E \cdot B = 0$  برای یک ترکیب خطی کلی از امواجی است که در جهت مخالف هم منتشر می‌شوند. یک موج الکترومغناطیسی عرضی که در جهت  $k$  منتشر می‌شود را می‌توان از یک تابع برداری دلخواه از یک متغیر اسکالر،  $E_{\perp}(\phi)$  ساخت که کاملاً در صفحه‌ای عمود بر یک بردار موج ثابت  $k = k\hat{k}$  قرار دارد:

$$E(r,t) = E_{\perp}(z - ckt) \quad cB(r,t) = \hat{k} \times E(r,t) \quad (۲.۲۶)$$

بردارهای  $(E, B, k)$  یک سه‌گانه متعامد راست را تشکیل می‌دهند. بنابراین:

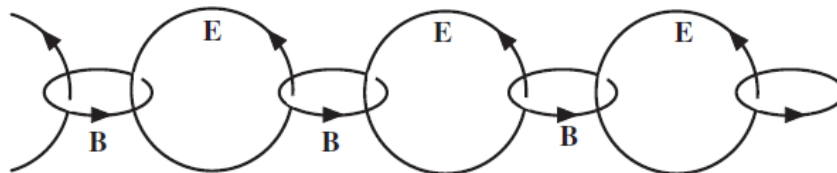
$$|E| = c|B| \quad (۲.۲۷)$$

شکل ۱-۲ دو نمایش از موج صفحه‌ای (۲.۲۶) را برای تابع  $E_{\perp}(\phi)$  نشان می‌دهد. قسمت بالایی، دامنه میدان الکتریکی و مغناطیسی را به عنوان تابعی از موقعیت در یک زمان ثابت، رسم می‌کند و قسمت پایینی، الگوی خط میدان مربوطه را نشان می‌دهد که در جهت عرضی تا  $\pm\infty$  گسترش می‌یابد. این موج غیرفیزیکی است زیرا هیچ موجی با وسعت بی‌نهایت نمی‌تواند در طبیعت وجود داشته باشد اما موضوع ما را از مطالعه بیشتر امواج سطحی، منصرف نمی‌کند زیرا بسیاری از میدان‌های الکترومغناطیسی واقعی به صورت موضعی در یک منطقه محدود از فضا شبیه یک موج مسطح هستند و (ii) ما می‌توانیم امواج صفحه‌ای با هم قرار داد تا امواج واقعی را با وسعت محدود، ترکیب کنیم.



شکل ۱-۲. دو نما از یک موج صفحه‌ای TEM در خلاء که با سرعت  $c$  در جهت  $k$  منتشر می‌شود. قسمت بالایی: دامنه‌های میدان بر روی محورهای متعامد رسم شده است. قسمت پایینی: خطوط میدان.

همچنین، حلقه‌های E و B، مانند حلقه‌های یک زنجیره به هم متصل می‌شوند (شکل ۲-۲). این قیاس که ماکسول آن را آغوش متقابل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی نامید، تضمین می‌کند که قانون فارادی در (۲.۳) به‌طور دینامیک حلقه‌هایی از E را می‌سازد و قانون آمپر-مکسول در (۲.۳) به‌طور دینامیک حلقه‌هایی از B را می‌سازد.



شکل ۲-۲. خطوط میدان الکتریکی و مغناطیسی مرتبط برای موج الکترومغناطیسی که به سمت راست منتشر می‌شود.

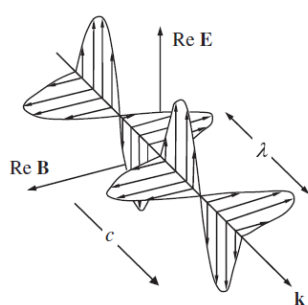
### ۲-۳-۲. سرعت فاز

فاز موج یک تابع اسکالر برابر است با:

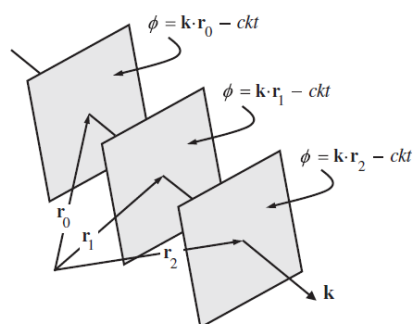
$$\phi(r, t) = z - ckt \quad (2.28)$$

$\phi(r, t)$  در زمان ثابت در همه جای صفحه عمود بر  $k$  که حاوی نقطه  $r$  است، ثابت است (شکل ۲-۳ الف). دامنه‌های E و B به ترتیب در همان صفحات، ثابت هستند. بنابراین فاز  $\phi = k \cdot [r - c\hat{k}t]$  در طول مسیر  $r(t) = r_0 + c\hat{k}t$  ثابت است. این نشان می‌دهد که هر صفحه با فاز ثابت در راستای عمود بر خودش با سرعت فاز  $v_p = dr/dt = c\hat{k}$  حرکت می‌کند. ماکسول با توجه به اینکه سرعت نور  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  برای انتشار امواج صفحه در خلاء است، به این نتیجه رسید که نور یک پدیده الکترومغناطیسی است. برای سطوح هم‌فاز می‌توان نوشت:

$$0 = \frac{d\phi(r, t)}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla\phi \cdot v_p \quad (2.29)$$



ب



الف

شکل ۲-۳ الف. فاز  $\phi(r, t)$  در صفحات عمود بر بردار موج  $k$ ، مقادیر ثابتی می‌گیرد. ب. انتشار یک موج تخت یکنواخت و تک‌رنگ.

### ۲-۳-۳. خواص مکانیکی

چگالی انرژی مرتبط با موج تخت (۲.۲۶)، برابر است با:

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E \cdot E + c^2 B \cdot B) = \frac{1}{2} \epsilon_0 [ |E_{\perp}|^2 + (\hat{k} \times E_{\perp}) \cdot (\hat{k} \times E_{\perp}) ] \quad (2.30)$$

$E_{\perp}$  عمود بر  $\hat{k}$  است.

$$u_{EM} = \epsilon_0 |E_{\perp}(k, r - ckt)|^2 \quad (۲.۳۱)$$

چگالی جریان انرژی  $S$  و چگالی تکانه خطی  $g$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$g(r, t) = \epsilon_0 (E \times B) = \frac{S}{c^2} = \frac{\epsilon_0}{c} |E_{\perp}(k, r - ckt)|^2 \hat{k} \quad (۲.۳۲)$$

این فرمول‌ها ثابت می کنند که یک موج تخت، انرژی و تکانه خطی را با سرعت نور در راستای انتشار موج، حمل می کند:

$$g = \frac{u_{EM}}{c} \hat{k} \quad \text{و} \quad S = u_{EM} c \hat{k} \quad (۲.۳۳)$$

می توان  $r \times g$  را به عنوان تکانه زاویه ای در واحد حجم مرتبط با یک میدان الکترومغناطیسی در نظر گرفت.

#### ۲-۳-۴. امواج تخت تک رنگ

یک موج تخت تک رنگ با فرکانس زاویه ای  $\omega$ ، یک مورد خاص از (۲.۲۶) است:

$$E_{\perp}(\phi) = \epsilon_{\perp} \exp(i\phi) \quad \text{و} \quad \omega = u_{EM} c |k| \quad (۲.۳۴)$$

میدان فیزیکی یک موج تخت تک رنگ، بخش حقیقی توابع برداری مختلط هستند:

$$E(r, t) = \epsilon_{\perp} \exp[i(k \cdot r - ckt)] \quad B(r, t) = B_{\perp} \exp[i(k \cdot r - ckt)] \quad (۲.۳۵)$$

موج تخت تک رنگ در (۲.۳۵)، یکنواخت نامیده می شود زیرا دامنه موج در صفحاتی که فاز ثابت است مقادیر ثابتی می گیرد. شکل ۲-۳ ب، یک موج معمولی از این نوع را نشان می دهد که در هر سه جهت به صورت سینوسی و با طول موج  $\lambda = 2\pi/k$  و دوره نوسان  $T = 2\pi/\omega$  متفاوت، امتداد می یابد. اختلاف فاز بین دو صفحه جدا شده با فاصله  $\lambda$  در شکل ۲-۳ الف،  $2\pi$  است.

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \{ |\text{Re } E|^2 + c^2 |\text{Re } B|^2 \} \quad (۲.۳۶)$$

به طور مشابه چگالی تکانه خطی و چگالی جریان انرژی (بردار پوئین تینگ) یک موج تخت تک رنگ، برابر است با:

$$\langle g \rangle = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{c} |\epsilon_{\perp}|^2 \hat{k} = \frac{\langle u_{EM} \rangle}{c} \hat{k} \quad (۲.۳۷)$$

$$\langle S \rangle = c^2 \langle g \rangle = \langle u_{EM} \rangle c \hat{k} \quad (۲.۳۸)$$

بنابراین سرعت انرژی برای یک موج تخت برابر است با:

$$v_E = \frac{\langle S \rangle}{\langle u_{EM} \rangle} = c \hat{k} \quad (۲.۳۹)$$

#### ۲-۳-۵. شدت موج



شدت وابسته به موقعیت یک موج الکترومغناطیسی به عنوان بزرگی میانگین زمانی بردار پوینتینگ در یک زمان  $T$  تعریف می‌شود که بسیار بزرگتر از هر مقیاس زمانی مشخصه مرتبط با موج است:

$$I(r) = \left| \frac{1}{T} \int_0^T dt S(r, t) \right| \quad (۲.۴۰)$$

برای یک موج تخت تک رنگ، کافی است  $T$  را به عنوان دوره تناوب موج و شدت که به میانگین چرخه کاهش می‌یابد، انتخاب کنیم:

$$I(r) = |\langle S \rangle| = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\epsilon_{\perp}|^2 \quad (۲.۴۱)$$

#### ۲-۴. قطبش

##### ۲-۴-۱. قطبش بیضوی

ممکن است قطبش یک موج الکترومغناطیسی در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یکسان نباشد. اگر یک موج تخت تک رنگ که در خلاء منتشر می‌شود را در نظر بگیریم باید اثبات کنیم که با پیشروی فاز موج  $2\pi$ ، نوک بردار میدان الکتریکی  $E$  یک بیضی را در صفحه عمود بر جهت انتشار  $k$  ترسیم می‌کند. برای این منظور، بردارهای پایه  $\hat{e}_1$  و  $\hat{e}_2$  را طوری تعریف می‌کنیم که  $(\hat{e}_2, \hat{e}_1, \hat{k})$  یک مجموعه متعامد راستگرد را تشکیل می‌دهد:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \quad \text{و} \quad \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k} \quad (۲.۴۲)$$

$\hat{e}_1$  و  $\hat{e}_2$  بردارهای پایه برای  $\epsilon_{\perp}$  هستند. بنابراین می‌توان میدان الکتریکی را به صورت زیر نوشت:

$$E(r, t) = [\epsilon_1 \hat{e}_1 + \epsilon_2 \hat{e}_2] \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \quad (۲.۴۳)$$

$\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  کمیت‌های مختلطی هستند که با اعداد حقیقی  $A$ ،  $B$ ،  $\delta_1$  و  $\delta_2$  بیان می‌شوند:

$$\epsilon_1 = A \exp(i\delta_1) \quad \text{و} \quad \epsilon_2 = B \exp(i\delta_2) \quad (۲.۴۴)$$

با استفاده از (۲.۴۴) و  $\phi = k \cdot r - \omega t$ ، قسمت حقیقی (۲.۴۳) بدست می‌آید:

$$\text{Re}E = A \cos(\phi + \delta_1) \hat{e}_1 + B \cos(\phi + \delta_2) \hat{e}_2 = E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2 \quad (۲.۴۵)$$

در آخر ضرایب  $\hat{e}_1$  و  $\hat{e}_2$  را در تساوی دوم (۲.۴۵) معادل سازی می‌کنیم تا دو معادله زیر بدست آید:

$$\frac{E_1}{A} \sin\delta_2 - \frac{E_2}{B} \sin\delta_1 = \sin(\delta_2 - \delta_1) \cos \quad (۲.۴۶ \text{ الف})$$

$$\frac{E_1}{A} \cos\delta_2 - \frac{E_2}{B} \cos\delta_1 = \sin(\delta_2 - \delta_1) \sin \quad (۲.۴۶ \text{ ب})$$

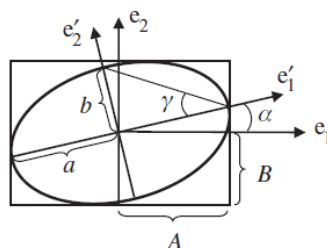
دو معادله فوق را به توان ۲ می‌رسانیم و با هم جمع می‌کنیم:

$$\left(\frac{E_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_2}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{E_1}{A}\right)\left(\frac{E_2}{B}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \quad (۲.۴۷)$$

جایی که :

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 \quad (۲.۴۸)$$

معادله (۲.۴۷) یک بیضی را در صفحه  $e_1 - e_2$  توصیف می کند (شکل ۲-۴). بر این اساس، موج تخت تک رنگ (۲.۴۳)، قطبش بیضوی را نشان می دهد. خروج از مرکز و جهت گیری بیضی به اختلاف فاز  $\delta$  و نسبت دامنه  $B/A$ ، بستگی دارد.



شکل ۲-۴. قطبش بیضوی برای یک موج تخت تک رنگ.

### ۲-۴-۲. قطبش خطی

اگر  $\delta = \delta_2 - \delta_1 = m\pi$  باشد، قطبش بیضوی به قطبش خطی تبدیل می شود. در این حالت بردار میدان الکتریکی در تمامی  $t$  و  $r$  ها دارای راستای ثابتی است.

$$\text{Re}\{E(r, t)\} = (A\hat{e}_1 \pm B\hat{e}_2) \cos(k \cdot r - \omega t + \delta_1) \quad (۲.۴۹)$$

### ۲-۴-۳. قطبش دایروی

قطبش بیضوی وقتی به به قطبش دایروی تبدیل می شود که مولفه های متعامد میدان الکتریکی دارای اندازه برابر اما اختلاف فاز  $90^\circ$  باشند :

$$A = B = \frac{A}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \delta = \delta_2 - \delta_1 = m\pi \quad (m = \pm 1, \pm 3, \dots) \quad (۲.۵۰)$$

نوک بردار میدان الکتریکی روی یک دایره، دوران می کند :

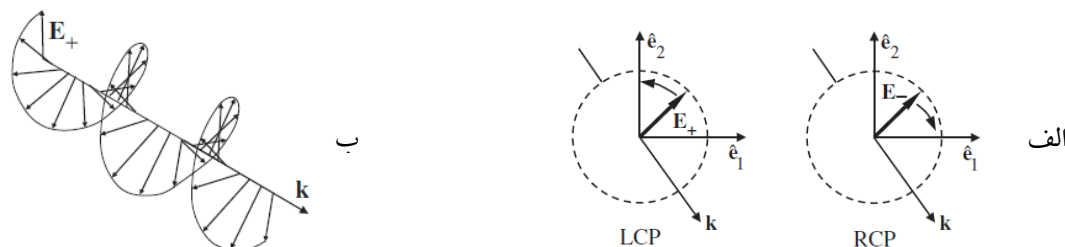
$$\text{Re}\{E(0, t)\} = \frac{A}{\sqrt{2}} [\hat{e}_1 \cos\omega t \pm \hat{e}_2 \cos(\omega t - \delta)] \quad (۲.۵۱)$$

شرط (۲.۵۰) بیان می کند که  $\cos\delta = 0$  و  $\sin\delta = 1 \pm$  با انتخاب علامت دو میدان مجزا از (۲.۵۱) داریم:

$$\text{Re}\{E \pm (0, t)\} = \frac{A}{\sqrt{2}} [\hat{e}_1 \cos\omega t \pm \hat{e}_2 \sin\omega t] \quad (۲.۵۲)$$

شکل ۲-۵ الف، رفتار (۲.۵۲) را از جهتی که موج در حال پیشروی است، نشان می دهد. حرکت نوک برای  $+E$ ، خلاف جهت عقربه های ساعت است و ما از موجی با قطبش دایره ای چپ (LCP) صحبت می کنیم. حرکت نوک  $-E$  در جهت

عقربه های ساعت است و ما از موجی با قطبش دایره ای راست (RCP) صحبت می کنیم. شکل ۵-۲، وضعیت  $E(r)$  را برای یک موج صفحه ای تک رنگ LCP در زمان ثابت  $t = 0$ ، نشان می دهد. نوک بردارهای میدان الکتریکی یک مارپیچ دایره ای را ترسیم می کنند. یک موج RCP شبیه به نظر می رسد با این تفاوت که جهت پیچش، مخالف است.



شکل ۵-۲. الف. هنگامی که موج نزدیک می شود، نوک بردار الکتریکی موج صفحه ای تک رنگ یک دایره در جهت عقربه های ساعت برای قطبش دایره ای راست (RCP) و یک دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت برای قطبش دایره ای چپ (LCP) ترسیم می کند. ب. تصویر لحظه ای از  $E(r,0)$  برای یک موج صفحه ای تک رنگ LCP.

برای بسیاری از کاربردها، بهتر است که بردارهای پایه دکارتی  $\hat{e}_1$  و  $\hat{e}_2$  را با بردارهای مختلط زیر نمایش دهیم:

$$\begin{cases} \hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2) \\ \hat{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{e}_+^* \cdot \hat{e}_+ = 1 \\ \hat{e}_+^* \cdot \hat{e}_- = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

اهمیت بردارهای مختلط با یافتن قسمت حقیقی میدان مختلط الکتریکی، مشخص می شود:

$$E_{\pm}(r, t) = A\hat{e}_{\pm} \exp[i(k \cdot r - \omega t)] = A \left[ \frac{\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2}{\sqrt{2}} \right] \exp[i(k \cdot r - \omega t)] \quad (2.54)$$

$\hat{e}_+$  یک موج خالص چپ گرد LCP و  $\hat{e}_-$  نشان دهنده یک موج خالص راست گرد RCP خالص است. پس نمایش کلی میدان به صورت زیر است:

$$E(r, t) = [\epsilon_+ \hat{e}_+ + \epsilon_- \hat{e}_-] \exp\{i(k \cdot r - \omega t)\} \quad (2.55)$$

#### ۲-۴-۴. قطبش بیضوی

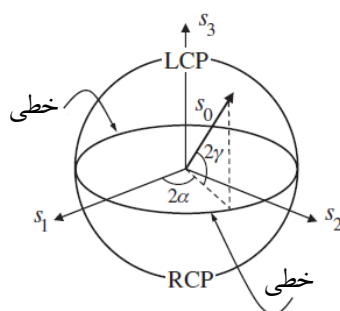
برای تعمیم قطبش دایره ای به قطبش بیضوی باید مقادیر دلخواهی برای اختلاف فاز  $\delta$  و نسبت  $A/B$ ، انتخاب کرد. وقتی که  $\sin \delta > 0$  باشد، آن گاه نوک بردار عرضی  $E$  روی بیضی در جهت پاد ساعت گرد، حرکت می کند که به آن قطبش بیضوی چپ گرد می گویند، و وقتی که  $\sin \delta < 0$  باشد، آن گاه نوک بردار عرضی  $E$  در جهت ساعت گرد، حرکت می کند که به آن قطبش بیضوی راست گرد می گویند. در هر دو حالت، اندازه میدان الکتریکی بر حسب تابعی از زمان، تغییر می کند و نوک بردار  $E$ ، یک مسیر مارپیچ بیضوی را در سه بعد طی می کند.

#### ۲-۴-۵. پارامترهای استوکس و کره پیونکاره

در فرکانس‌های پایین (تا میکروویو) بردارهای میدان الکتریکی بر روی یک مسیر بیضوی حرکت می‌کنند تا بتوان پارامترهای  $A$ ،  $B$  و  $\delta$  را اندازه‌گیری شوند. در فرکانس‌های اپتیکی و بالاتر، معمولاً  $A$ ،  $B$  و  $\delta$  از پارامترهای استوکس بدست می‌آید:

$$\begin{cases} s_0 = A^2 + B^2 \\ s_1 = A^2 - B^2 \\ s_2 = 2AB \cos \delta \\ s_3 = 2AB \sin \delta \end{cases} \rightarrow s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \quad (2.56)$$

یک روش اندازه‌گیری شدت موج در پایه‌های متعامد مختلف است.  $I_0$  و  $I_{90}$  شدت‌های اندازه‌گیری شده توسط آشکارسازهای حساس به قطبش‌های خطی افقی و عمودی به سیستم محورهای  $e_1$ - $e_2$  می‌باشند.  $I_{+45}$  و  $I_{-45}$  شدت‌های اندازه‌گیری شده توسط آشکارسازهای حساس به قطبش‌های خطی در زوایای  $+45$  و  $-45$  درجه نسبت به همان محورها هستند.  $I_{LCP}$  و  $I_{RCP}$  شدت‌های اندازه‌گیری شده توسط آشکارسازهای حساس به قطبش دایره ای راست گرد و چپ گرد می‌باشند (شکل ۶-۲).



شکل ۶-۲. یک کره پیونکار با شعاع  $s_0$ .

یک وابستگی یک به یک بین هر حالت قطبش و یک نقطه واحد از کره پیونکار وجود دارد. اگر فرض کنیم که زاویه  $\alpha$  باعث دوران سیستم محورهای  $e_1$ - $e_2$  به محورهای اصلی  $e_1'$ - $e_2'$  قطبش بیضوی شود، آن‌گاه تاثرات زاویه  $\gamma$ ، نسبت محور فرعی به محور اصلی بیضی است. با در نظر گرفتن دوران و نوشتن مولفه‌های میدان در سیستم محور اصلی، داریم:

$$E_1' = a \cos(k.r - \omega t + \tau) \quad E_2' = \pm b \sin(k.r - \omega t + \tau) \quad (2.57)$$

با استفاده از معادله (۲.۴۷)، می‌توان نشان داد که:

$$\begin{cases} \tan 2\alpha = \frac{2AB}{A^2 - B^2} \cos \delta \\ \sin 2\gamma = \frac{2AB}{A^2 + B^2} \sin \delta \end{cases} \quad (2.58)$$

با جایگزینی (۲.۵۸) در (۲.۵۶) به نتیجه نهایی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} s_1 = s_0 \cos 2\gamma \cos 2a \\ s_2 = s_0 \cos 2\gamma \cos 2a \\ s_3 = s_0 \sin 2\gamma \end{cases} \quad (۲.۵۹)$$

معادله (۲.۵۹) نشان می‌دهد که پارامترهای استوکس، پارامترهای قطبش اصلی بیضوی A، B و  $\delta$  را به یک نقطه خاص بر روی سطح یک کره ترسیم می‌کنند. تمام قطبش‌های خطی (افقی، عمودی و ...) بر روی استوای کره قرار می‌گیرند (LCP در قطب شمال و RCP در قطب جنوب) و تمام نقاط دیگر روی کره، قطبش بیضوی را توصیف می‌کنند.

### ۲-۴-۶. امواج غیرقطبیده و به‌طور جزئی قطبیده

یک موج الکترومغناطیسی که از برهم‌نهی تعداد زیادی امواج صفحه‌ای تک رنگ، که همه آنها دارای ثابت انتشار یکسان  $k$  هستند، موج غیرقطبی نامیده می‌شود. اگر حالت‌های قطبش امواج تشکیل دهنده، مخلوط تصادفی از قطبش‌های متعامد باشد، آن گاه، پارامترهای قطبش، B و  $\delta$  مقادیر ثابت نیستند اما به طور تصادفی به عنوان تابعی از زمان تغییر می‌کنند. به برهم‌نهی امواجی که در آن پارامترهای قطبش در زمان تغییر می‌کنند، اما کاملاً تصادفی نیستند، قطبی جزئی گفته می‌شود.

### ۲-۵. حل تمرینات

تمرین ۱: با محاسبه مستقیم نشان دهید که میدان‌های  $E(r, t) = E_{\perp}(k, r - ckt)$  و  $cB(r, t) = \hat{k} \times E(r, t)$  چهار معادله ماکسول در خلاء، صدق می‌کنند.

حل: فرض می‌کنیم  $f'(\phi) = df/d\phi$  که فاز  $\phi$  با (۲.۲۸) داده می‌شود. با داشتن  $k \cdot E_{\perp} = 0$  و با استفاده از قانون زنجیره‌ای، داریم:

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot E'_{\perp}(\phi) \cdot \nabla \phi = k \cdot \nabla \cdot E'_{\perp}(\phi) = 0$$

به‌طور مشابه  $\nabla \times E = k \times E'_{\perp}$ . پس از آنجا که  $\hat{k}$  یک بردار ثابت است، داریم:

$$\nabla \cdot cB = \nabla \cdot (\hat{k} \times E) = \hat{k} \cdot (\nabla \times E) = -\hat{k} \cdot (k \times E'_{\perp}) = 0$$

به‌طور مشابه قانون فاراده را با استفاده از روابط بالا، ثابت می‌کنیم:

$$c\dot{B} = \hat{k} \times \dot{E} = \hat{k} \times E'_{\perp} \dot{\phi} = -ck \cdot E'_{\perp} = -c\nabla \times E$$

در پایان  $\dot{E} = -ckE'_{\perp}$  و  $\hat{k}$  یک بردار ثابت است:

$$\nabla \times cB = \nabla \times (\hat{k} \times E) = -(\hat{k} \cdot \nabla)E + \hat{k}(\nabla \cdot E) = \hat{k}_i E'_{\perp} \partial_i \phi = k E'_{\perp}$$

که نشان می‌دهد  $\nabla \times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$  معادله نهایی ماکسول در فضای آزاد است.

تمرین ۲: برهم‌نهی دو موج تخت تک رنگ با دامنه یکسان را وقتی که در خلاف جهت هم منتشر می‌شوند، بیابید:

الف. فرض کنید که موجی که در جهت +z حرکت می کند، قطبش دایروی چپ گرد است و موج در جهت -z، قطبش دایروی راست گرد است.

ب. همین مسئله را برای حالتی که هر دو موج، LCP باشند، حل کنید.

حل:

الف. چون چرخش موج چپ گرد در جهت +z با چرخش موج راست گرد در جهت -z، یکسان است، داریم:

$$E_1 = \text{Re} \{ (\hat{x} - i\hat{y}) [e^{i(k.r+\omega t)} + e^{i(k.r-\omega t)}] \} = (\hat{x} \cos kz + \hat{y} \sin kz) \cos \omega t$$

$$cB_1 = \hat{z} \times \text{Re} \{ (\hat{x} - i\hat{y}) [e^{i(k.r+\omega t)} - e^{i(k.r-\omega t)}] \} = (\hat{x} \cos kz + \hat{y} \sin kz) \sin \omega t$$

این یک موج ایستا با  $E \parallel B$  است. از آنجا که  $E_y/E_x = B_y/B_x = \tan z$  است، نوک هر دو بردار در یک زمان ثابت یک مسیر مارپیچ حول z است.

ب. چون چرخش موج چپ گرد در جهت +z با چرخش موج راست گرد در جهت -z، یکسان است، داریم:

$$E_2 = \text{Re} \{ (\hat{x} - i\hat{y}) e^{i(k.r+\omega t)} + (\hat{x} + i\hat{y}) e^{i(k.r-\omega t)} \} = (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t) \cos kz$$

$$cB_2 = \hat{z} \times \text{Re} [ (\hat{x} - i\hat{y}) e^{i(k.r+\omega t)} - (\hat{x} + i\hat{y}) e^{i(k.r-\omega t)} ] = (\hat{x} \cos \omega t + \hat{y} \sin \omega t) \cos kz$$

این یک موج ایستا با  $E \parallel B$  است. از آنجا که  $E_y/E_x = B_y/B_x = \tan \omega t$  است، تمام طرح میدات در یک صفحه ای است که حول محور z با فرکانس  $\omega$  نوسان می کند.

تمرین ۳: رابطه مقابل را اثبات کنید:

$$S_0 = I_0 + I_{90}$$

$$S_1 = I_0 - I_{90}$$

$$S_2 = I_{+45} - I_{-45}$$

$$S_3 = I_{RCP} - I_{LCP}$$

حل: تابع نمایی در  $E(r, t) = [e_1 \varepsilon_1 + e_2 \varepsilon_2] e^{i(k.r - \omega t)}$ ، نقش مهمی ندارد و در حالت کلی قطبش را به صورت  $E(r, t) = e_1 \varepsilon_1 + e_2 \varepsilon_2$  می نویسیم.  $I_0$  و  $I_{90}$  شدت های مولفه  $e_1$  و  $e_2$  هستند، پس با استفاده از رابطه (۲.۴۴)، به نتیجه زیر می رسیم:

$$S_0 = I_0 + I_{90} = |\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_2|^2 = A^2 + B^2$$

$$S_1 = I_0 - I_{90} = |\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_2|^2 = A^2 - B^2$$

برای محاسبه  $S_2$ ، محورهای  $e_1 - e_2$  را به اندازه  $\theta = -45$  دوران می دهیم و به مولفه ها در پایه جدید می رسیم:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{-45} \\ \varepsilon_{+45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

بنابراین شدت  $S_2$  برابر است با :

$$S_2 = I_{+45} - I_{-45} = |\varepsilon_{+45}|^2 - |\varepsilon_{-45}|^2 = \frac{1}{2} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^* - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^*]$$

$$S_2 = \varepsilon_1^* \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2^* = 2\text{Re}[\varepsilon_1^* \varepsilon_2] = 2AB \cos\delta$$

با بازنویسی رابطه (۲.۴۳) در قطبش بیضوی، داریم :

$$\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon_1 - i\varepsilon_2}{\sqrt{2}} \quad \varepsilon_- = \frac{\varepsilon_1 + i\varepsilon_2}{\sqrt{2}}$$

بنابراین :

$$S_3 = I_{RCP} - I_{LCP} = |\varepsilon_+|^2 - |\varepsilon_-|^2 = \frac{1}{2} [(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2)(\varepsilon_1^* + i\varepsilon_2^*) - (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\varepsilon_1^* - i\varepsilon_2^*)] =$$

$$-i [\varepsilon_1^* \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2^*] = 2\text{Im}[\varepsilon_1^* \varepsilon_2] = 2AB \sin\delta$$

## فصل سوم : امواج در محیط مادی

### ۳-۱. امواج تخت

معادلات ماکسول در ماده به صورت زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{jf} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1)$$

با انتخاب  $\rho_f = \mathbf{jf} = 0$  به راه حل‌هایی برای معادلات (۳.۱) خواهیم رسید :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{و} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3.2)$$

همچنین ضریب شکست  $n$  و امپدانس ذاتی  $Z$  یک محیط برابرند با :

$$n = c\sqrt{\mu\epsilon} \quad \text{و} \quad Z = \sqrt{\mu/\epsilon} \quad (3.3)$$

ضریب شکست بدون بعد است ( $n = 1$ ) و امپدانس ذاتی برابر با  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377$  می‌باشد. روابط سازنده، تعداد میدان‌های معادلات ماکسول را از چهار به دو کاهش می‌دهد. پس  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  به عنوان میدان‌های مستقل انتخاب می‌شوند زیرا قطبش و مغناطیسی محیط برابر هستند با :

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} \quad \text{و} \quad \mathbf{M} = (\mu/\mu_0 - 1)\mathbf{H} \quad (3.4)$$

شرایط تطبیق در یک رابط برای  $\mathbf{E}$  و  $\mathbf{H}$  یکسان است و بردار پوئین‌تینگ برابر است با :

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.5)$$

بنابراین معادلات ماکسول بدون چشمه برای یک محیط نامحدود و همگن فضایی، برابر است با :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.6)$$

### ۳-۱-۱. امواج تخت تک رنگ

برای امواج تخت یکنواخت و تک رنگ داریم :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (3.7)$$

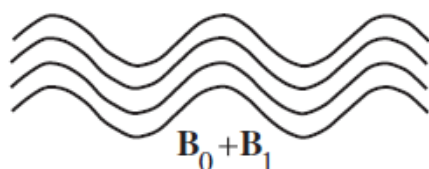
جایگزینی (۳.۷) در (۳.۶) ، چهار محدودیت ایجاد می‌شود :



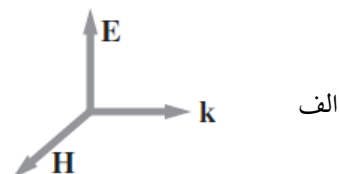
$$\begin{cases} \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = -\omega\epsilon\mathbf{E} \end{cases} \quad (3.8)$$

(E, H, k) یک مجموعه راست گرد متعامد را تشکیل می دهد (شکل ۳-۱ الف). بنابراین (۳.۷) یک موج الکترومغناطیسی عرضی (TEM) است و امپدانس موج با امپدانس ذاتی محیط برابر است:

$$Z_{wave} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z \quad (3.9)$$



ب



الف

شکل ۳-۱ الف. E، H و k برای یک موج تخت عرضی (TEM). ب. خطوط میدان مغناطیسی کل در پلاسمای مغناطیبه با موج برشی آلفون موجود است.

یک رابطه پراکندگی فرکانس موج  $\omega$  و بردار موج k وجود دارد:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} \quad (3.10)$$

با بسط ضرب سه گانه سمت چپ معادله بالا و استفاده از رابطه  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  داریم:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \omega^2\mu\epsilon \quad \text{یا} \quad \omega(\mathbf{k}) = \frac{c}{n}k \quad (3.11)$$

در نتیجه، یک محیط نامحدود از امواج تخت عرضی و تک رنگ، پشتیبانی می کند، اگر:

$$\mathbf{k} = n \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{و} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{و} \quad Z\mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \quad (3.12)$$

سرعت فاز  $v_p$  این امواج و سرعت انرژی  $v_E$  برابر است با:

$$v_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{n} \hat{\mathbf{k}} \quad v_E = \frac{\langle S \rangle}{\langle u_{EM} \rangle} \quad (3.13)$$

با استفاده از (۳.۱۲)، نسبت  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$  به  $u_{EM} = 1/2|\mathbf{E}|^2 + 1/2\mu|\mathbf{H}|^2$  را بررسی می کنیم. با توجه به قضیه میانگین زمانی، داریم:

$$v_E = \frac{\frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\}}{\frac{1}{2} \text{Re}\{\frac{1}{2}\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{2}\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*\}} = \frac{2|\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{k}}}{Z(\epsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2)} = \frac{\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n} \hat{\mathbf{k}} \quad (3.14)$$

## ۳-۱-۲. امواج آلفون

پلاسمای مغناطیبه نوعی از امواج الکترومغناطیسی با فرکانس پایین به نام امواج آلفون، می باشد و رفتار آن توسط ثابت دی الکتریک  $\epsilon = \epsilon_0 + \rho/B_0^2$ ، محاسبه می شود.  $\rho$  چگالی جرمی پلاسمای در حضور یک میدان مغناطیسی ساکن  $B_0$

و یک میدان کند تغییر  $E_1$  عمود بر  $B_0$  است.  $E_1$  مربوط به یک موج انتشاری  $(E_1 \hat{x}, B_1 \hat{y})$  است و  $B = B_0 \hat{z}$  را به اندازه‌ای بزرگ، انتخاب می‌کنیم تا تأثیر میدان موج روی حرکت ذرات پلاسما نادیده گرفته شود. اگر  $B_0 \parallel k$  و  $1 \gg \rho/B_0^2$  باشد، آن گاه سرعت فاز (۳.۱۳) برابر است با:

$$v_A = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}} = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 \rho}} \quad (3.15)$$

رابطه (۳.۱۵) یادآور سرعت فتر،  $v = \sqrt{T/\rho}$ ، یک موج عرضی روی یک رشته با ثابت کشش  $T$  و چگالی جرم  $\rho$  است.  $B^2/\mu_0$  کششی است که در مقابل خمش خطوط میدان مغناطیسی مقاومت می‌کند. بسیار مهم است که  $B_0 \parallel k$  باشد، بنابراین میدان مغناطیسی  $B_1$  امواج آلفون یک موج سینوسی به خطوط مستقیم میدان  $B_0$  اضافه می‌کند (شکل ۳-۱ ب)، یعنی وجود امواج خمیده پیش زمینه  $B_0$ ، آنها را خم می‌کند اما فشرده نمی‌سازد. این امواج، آلفون نامیده می‌شوند.

### ۳-۱-۳. توازن انرژی در ماده ساده

اگر قسمتی از گذردهی یا پذیرفتاری ماده، موهومی باشد، میدان‌های تک فام به صورت معکوس انرژی خود را از دست می‌دهند ( $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ ). بنابراین جریان آزاد وجود ندارد و بردار پویین تینگ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_V d^3r \left[ E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \right] = \int_S dS \cdot (E \times H) \quad (3.16)$$

میدان‌ها برابر هستند با:

$$\begin{cases} E = \text{Re} [E_0 \exp(-i\omega t)] = E_0 \exp(-i\omega t) \\ D = \text{Re} [\epsilon E_0 \exp(-i\omega t)] = \epsilon' E + \epsilon'' E_0 \sin(i\omega t) \end{cases} \quad (3.17)$$

و با استفاده از میدان مغناطیسی  $B = \mu_0 H$  داریم:

$\Rightarrow$  آهنگ جذب انرژی در محیط = نرخ تغییرات انرژی ذخیره شده در محیط + نرخ خروج از انرژی

$$\int_V dS \cdot (E \times H) + \frac{d}{dt} \int_V d^3r \left[ \frac{\epsilon'}{2} |E|^2 + \frac{\mu_0}{2} |H|^2 \right] = \int_V d^3r \omega \epsilon'' |E|^2 \quad (3.18)$$

در نظر گرفتن واحد حجم ماده با یک موج تک رنگ به عنوان یک نوسانگر میرا با فاکتور کیفیت زیر می‌تواند مفید باشد:

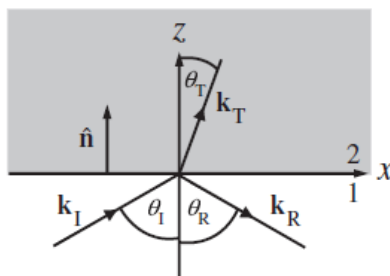
$$Q = \omega \times \frac{\text{maximum energy stored}}{\text{average power loss}} = \omega \times \frac{\frac{1}{2} \epsilon' |E_0|^2}{\frac{1}{2} \epsilon'' |E_0|^2} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''} \quad (3.19)$$

### ۳-۲. بازتاب و شکست

یک موج مسطح بر روی یک مرز تیز بین دو ماده غیر مشابه، یک راه حل برای معادلات ماکسول به شکل یک موج صفحه‌ای منعکس شده و یک موج صفحه‌ای شکسته (هنگامی که طول موج در مقایسه با انحنای مرز کوچک باشد) ایجاد

می‌کند. در شکل ۳-۲،  $Z = 0$  مرز بین دو نیمه فضای نیمه نامتناهی است که یکی با پارامترهای ماده  $(\epsilon_1, \mu_1)$  و دیگری با پارامترهای ماده  $(\epsilon_2, \mu_2)$  مشخص می‌شود. میدان الکتریکی در این دو محیط برابر است با:

$$\begin{cases} E_1(r, t) = E_I \exp [i(k_I \cdot r - \omega_I t)] + E_R \exp [i(k_R \cdot r - \omega_R t)] \\ E_2(r, t) = E_T \exp [i(k_T \cdot r - \omega_T t)] \end{cases} \quad (۳.۲۰)$$



شکل ۳-۲. بردارهای موج برای امواج فرودی (I)، منعکس شده (R) و ارسال شده (T) در یک مرز مستقیم.

معادله (۳.۱۵) مشخصات این امواج شامل میدان‌های مغناطیسی با دامنه‌های  $H_I$ ،  $H_R$  و  $H_T$  را تکمیل می‌کند:

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot [D_1 - D_2] = 0 \\ \hat{n} \cdot [B_1 - B_2] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{n} \times [E_1 - E_2] = 0 \\ \hat{n} \times [H_1 - H_2] = 0 \end{cases} \quad (۳.۲۱)$$

### ۳-۲-۱. بازتاب آینه‌وار و قانون اسنل

شرایط هم‌فازی (۳.۲۱) را نمی‌توان برای همه زمان‌ها و همه نقاط در صفحه  $Z = 0$  برآورده کرد، مگر اینکه امواج فرودی، بازتابی و عبوری، یکسان باشند. پس  $\omega_I = \omega_R = \omega_T \equiv \omega$  و  $k_I \cdot r|_{z=0} = k_R \cdot r|_{z=0} = k_T \cdot r|_{z=0}$  بنابراین:

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} \quad \text{و} \quad k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty} \quad (۳.۲۲)$$

سه بردار موج  $k_I$ ،  $k_R$  و  $k_T$ ، هم صفحه هستند. یعنی جهت محورهای دکارتی طوری هست که صفحه  $X-Z$ ، صفحه تابش می‌باشد (شکل ۳-۲). چون  $k_{Iy} = 0$ ، بنابراین  $k_{Ry} = k_{Ty} = 0$  می‌باشد. رابطه (۳.۲۲)، نشان‌گر قوانین بازتاب و شکست می‌باشد. امواج فرودی و بازتابی هر دو در محیط ۱ قرار می‌گیرند:

$$k_I = k_R = n_1 \frac{\omega}{c} = k_1 \quad (۳.۲۳)$$

چون  $k_{Ix} = k_{Rx}$ ، پس  $\sin \theta_I = \sin \theta_R$ ، که بیانگر قانون بازتاب  $\theta_I = \theta_R = \theta_1$  است. به طور مشابه در محیط ۲، چون  $k_2$   $k_{Tx} = k_{Ry}$  و  $\theta_2 = \theta_T$  است، پس داریم:

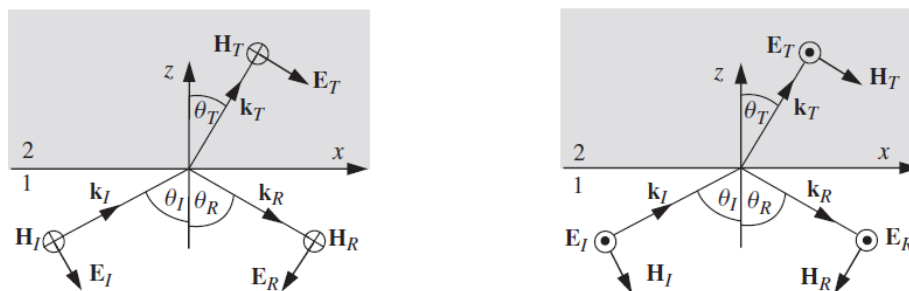
$$k_{Tx} = k_2 \sin \theta_T = n_2 \frac{\omega}{c} \sin \theta_1 \quad (۳.۲۴)$$

با استفاده از  $k_{Ix} = k_{Tx}$ ، قانون بازتاب اسنل  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$  بدست می‌آید. پس بردار موج بازتاب  $k_R$  هنگامی که یک موج از یک محیط سریع به یک محیط آهسته می‌رود، نسبت به بردار موج فرودی  $k_I$  به سطح مشترک عادی، نزدیک‌تر می‌شود (یعنی وقتی که  $n_1 < n_2$ ). قوانین انعکاس و شکست اغلب سینماتیکی هستند (و نه دینامیکی) و فقط از

ماهیت موجی میدان‌ها پیروی می‌کنند. قانون اسنل می‌گوید که با استفاده از موجی که از خلاء  $n_1 = 1$  به ماده‌ای با ضریب شکست  $n_2 < 0$  ( $\sin \theta_1 = -|n_2| \sin \theta_2$ ) وارد می‌شود، بردار موج شکسته  $k_T$  به سمت چپ شکسته می‌شود ( $\theta_2 < 0$ ).

### ۳-۲-۲. معادلات فرنل

معادلات فرنل، شدت پرتوهای نور منعکس شده و شکسته شده در سطح مشترک بین دو محیط شفاف را تعیین می‌کند. بطوری که یک موج سطحی می‌تواند به دو موج صفحه‌ای با قطبش متعامد، تجزیه شود (شکل ۳-۳).



شکل ۳-۳. بردارهای موج و بردارهای میدان برای امواج صفحه‌ای برخوردی، بازتابی و شکستی در یک رابط ناگهانی برای دو قطبش متعامد. موج فرودی.

یعنی یک موج قطبیده p که در آن کاملاً موازی با صفحه تابش است و یک موج قطبیده s که در آن کاملاً عمود بر صفحه تابش است. حالت کلی با روی هم قرار دادن دامنه‌های میدان بدست آمده از اعمال شرایط تطبیق برای دو قطبش مولفه به طور جداگانه، دنبال می‌شود. شرط هم‌فازی قطبش p توسط سمت چپ شکل ۳-۳ و روابط (۳.۱۲) بیان می‌شود:

$$\begin{cases} E_I \cos \theta_1 - E_R \cos \theta_1 = E_T \cos \theta_2 \\ H_I + H_R = H_T \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_I \cos \theta_1 - E_R \cos \theta_1 = E_T \cos \theta_2 \\ Z_2 (Z_1 + Z_R) = Z_1 E_T \end{cases} \quad (3.25)$$

پس بازتاب و دامنه‌های انتقال برابرند با:

$$r_s = \left[ \frac{E_R}{E_I} \right]_p = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \quad \text{و} \quad t_p = \left[ \frac{E_T}{E_I} \right]_p = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \quad (3.26)$$

همچنین شرط هم‌فازی قطبش s برابر است با:

$$\begin{cases} E_I + E_R = E_T \\ H_I \cos \theta_1 - H_R \cos \theta_1 = H_T \cos \theta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E_I + E_R = E_T \\ Z_2 (E_I - E_R) \cos \theta_1 = Z_1 E_T \cos \theta_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

پس بازتاب و دامنه‌های انتقال برابرند با:

$$r_s = \left[ \frac{E_R}{E_I} \right]_p = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad \text{و} \quad t_p = \left[ \frac{E_T}{E_I} \right]_p = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \quad (3.28)$$

معادلات (۳.۲۶) و (۳.۲۸)، معادلات فرنل هستند.

## ۳-۲-۳. انتقال انرژی

بقای انرژی مستلزم آن است که امواج بازتاب شده و شکسته شده، انرژی انتقال یافته به یک رابط مسطح توسط یک موج الکترومغناطیسی فرودی را منتقل می‌کنند. مقدار مورد نظر، ضریب بازتاب انرژی است:

$$R = \left| \frac{\langle S_R \rangle \cdot \hat{n}}{\langle S_I \rangle \cdot \hat{n}} \right| \quad (۳.۲۹)$$

بنابراین میانگین زمانی بردار پوئین تینگ برابر است با:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(E \times H^*) = \frac{1}{2Z} |E|^2 \cdot \hat{k} \quad (۳.۳۰)$$

ضریب بازتاب برابر با مربع دامنه بازتاب فرنل است:

$$R = \left| \frac{E_R}{E_I} \right|^2 = |r|^2 \quad (۳.۳۱)$$

با استفاده از (۳.۲۶) و (۳.۲۸)، ضرایب بازتاب برای امواج p و امواج s، برابرند با:

$$\begin{cases} R_p = \left( \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2} \right)^2 \\ R_s = \left( \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2} \right)^2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{فرود عمودی} \\ \rightarrow \end{array} \quad R = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \rightarrow \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (۳.۳۲)$$

ضریب انتقال انرژی برابر است با:

$$R = \left| \frac{\langle S_T \rangle \cdot \hat{n}}{\langle S_I \rangle \cdot \hat{n}} \right| = \frac{Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1} \left| \frac{E_T}{E_I} \right|^2 \quad (۳.۳۳)$$

ضریب انتقال برای امواج p و امواج s خالص برابر است با:

$$\begin{cases} T_p = \frac{4 Z_1 Z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2)^2} \\ T_s = \frac{4 Z_1 Z_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{(Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2)^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{فرود عمودی} \\ \rightarrow \end{array} \quad T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \rightarrow \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \quad (۳.۳۴)$$

پایستگی انرژی برابر با  $T + R = 1$  می‌باشد.

## ۳-۲-۴. قطبش با بازتاب

موج الکترومغناطیسی غیرقطبی را می‌توان با بازتاب، قطبیده کرد چون ضریب بازتاب فرنل برای مؤلفه‌های s و p در زوایای متفاوتی، صفر است. با استفاده از مربع شرط امپدانس و قانون اسنل داریم:

$$\left( \frac{Z_1}{Z_2} \right)^2 \cos^2 \theta_1 + \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 = \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1 \quad (۳.۳۵)$$

از شرط هم‌فازی، مورد مشابهی برای s بدست می‌آید (جای  $Z_1$  و  $Z_2$  عوض می‌شود). پس اگر  $\theta_1$  را با  $\theta_E$  (برای حالت s) و با  $\theta_B$  را (برای حالت p) جایگزین کنیم، داریم:

$$\begin{cases} s: \tan^2 \theta_E = \frac{(Z_2/Z_1)^2 - 1}{1 - (n_1/n_2)^2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\epsilon_1 \mu_2 - \epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1} \\ p: \tan^2 \theta_B = \frac{(Z_1/Z_2)^2 - 1}{1 - (n_1/n_2)^2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{\epsilon_2 \mu_1 - \epsilon_1 \mu_2}{\epsilon_2 \mu_2 - \epsilon_1 \mu_1} \end{cases} \quad (۳.۳۶)$$

در روابط (۳.۳۶) اگر  $Z_1 = Z_2$  باشد، آن‌گاه  $\theta_E = \theta_B$  و هر دو زاویه صفر می‌شوند. همچنین  $\theta_E$  و  $\theta_B$  برای مقادیر دلخواه، متفاوت خواهند بود. پس یک موج غیرقطبیده در زاویه فرود  $\theta_B$ ، فقط مولفه s را منعکس می‌کند و در زاویه فرود  $\theta_E$  فقط مولفه p را منعکس می‌کند. هنگامی که دو محیط غیر مغناطیسی باشند ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ):

$$\tan^2 \theta_E = -1 \quad \tan^2 \theta_B = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (۳.۳۷)$$

$\tan^2 \theta_E$  هیچ راه حلی ندارد اما  $\tan^2 \theta_B$  با انعکاس یک موج غیرقطبی از سطح مشترک در زاویه تابش برونتر، یک موج s خالص تولید می‌کند:

$$\theta_B = \tan^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (۳.۳۸)$$

از ترکیب رابطه بالا و قانون اسنل داریم:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_B = \cot \theta_B \sin \theta_B = \cos \theta_B \rightarrow \theta_B + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (۳.۳۹)$$

زاویه برونتر زمانی اتفاق می‌افتد که موج ارسالی و موج بازتاب شده، عمود باشند:

$$\Pi = \left| \frac{R_s - R_p}{R_s + R_p} \right| \quad (۳.۴۰)$$

هنگامی که زاویه فرود از زاویه برونتر عبور می‌کند، ضریب انعکاس p تغییر علامت می‌دهد اما ضریب انعکاس s تغییر علامت نمی‌دهد. چون  $k_I$  و  $k_R$  دارای علائم مخالف هستند، هنگامی که  $\theta_I < \theta_B$  باشد، یک موج فرودی با قطبش دایروی راست با قطبش بیضی در بازتاب به موج بیضوی چپ‌گرد تبدیل می‌شود و هنگامی که  $\theta_I > \theta_B$  باشد، به موج بیضوی راست‌گرد تبدیل می‌شود. بنابراین منشأ فیزیکی ناپدید شدن موج p بازتاب شده در زاویه برونتر وجود دارد.

### ۳-۲-۵. بازتاب کلی داخلی

طبق قانون اسنل، وقتی یک موج صفحه‌ای تک رنگ از محیطی با ضریب شکست بزرگتر به محیطی با ضریب شکست کوچکتر ( $n_1 > n_2$ ) منتشر می‌شود، زاویه شکست از زاویه فرود بزرگتر است ( $\theta_2 > \theta_1$ ) و هنگامی زاویه تابش به زاویه بحرانی می‌رسد که  $\sin \theta_c = n_2/n_1$  باشد. موج شکسته شده با مرز، مماس می‌شود و هنگامی که  $\theta_1 > \theta_c$  باشد، قانون اسنل دچار مشکل می‌شود. مطابق شکل ۳-۳، میدان الکتریکی p تبدیل به محیط ۲ می‌شود:

$$E_2(x, z) = E_T \exp[i(k_2 \cdot r - \omega t)] = E_T \exp[i(k_{2x} x + k_{2z} z - \omega t)] \quad (۳.۴۱)$$

$k_{2x} = k_{1x} = k_1 \sin\theta_1 = \omega/c n_1 \sin\theta_1$  مماس با وجه اشتراک و طبق قانون اسنل با رابطه زیر مرتبط است :

$$\begin{aligned} k_{2z}^2 &= k_2^2 \cos^2\theta_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 \cos^2\theta_2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 (1 - \sin^2\theta_2) \\ &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_2 \end{aligned} \quad (۳.۴۲)$$

اگر  $n_1 > n_2$  و  $\theta_1 > \theta_c$  باشد، جمله آخر در (۳.۴۲) منفی می شود و میدان الکتریکی در محیط ۲، میرا خواهد شد :

$$E_2(x, z) = E_T e^{-kz} \exp(ik_{1x} \sin\theta_1 - \omega t) \quad (۳.۴۳)$$

از آنجا که این موج در فاصله متوسط  $k^{-1}$  از صفحه  $z=0$  (در محیط ۲)، غیر صفر است پس آن را بین الوجهین می نامیم. موج در جهت  $x$  و مماس با وجه اشتراک با سرعت فاز زیر منتشر می شود :

$$v_P = \frac{\omega}{K_{1x}} = \frac{c}{n_1 \sin\theta_1} > \frac{c}{n_1} = v_{P1} \quad (۳.۴۴)$$

از آنجا که  $\theta_1 > \theta_c$  است، داریم :

$$v_P = \frac{c}{n_1 \sin\theta_1} = \frac{c/n_2}{(n_1/n_2) \sin\theta_1} = \left(\frac{\sin\theta_c}{\sin\theta_1}\right) v_{P2} < v_{P2} \quad (۳.۴۵)$$

بنابراین موج مماس با وجه اشتراک دو محیط و با سرعت فازی بین دو سرعت فاز ( $v_{P1} < v_P < v_{P2}$ ) در محیط منتشر می شود. اندازه  $E_T$  باید در معادله ماکسول  $\nabla \cdot E_2 = 0$  صدق کند

$$k_2 \cdot E_2 = 0 = K_{2x} E_{Tx} + K_{2z} E_{Tz} = K_{1x} E_{Tx} + ik E_{Tz} \rightarrow \frac{E_{Tz}}{E_{Tx}} = -\frac{ik}{k_1 \sin\theta_1} \quad (۳.۴۶)$$

بنابراین موج شکسته شده، عرضی نیست چون یک مولفه غیر صفر در راستای انتشار جهت  $x$  دارد و یکنواخت نیست چون اندازه آن در صفحات عمود بر راستای انتشار  $x$ ، ثابت نیست. موهومی بودن (۳.۴۶) باعث دوران قسمت حقیقی بردار میدان الکتریکی  $E_T$  در صفحه  $x-z$  می شود. از آنجا که اندازه موج بازتابیده با اندازه موج فرودی، برابر است این پدیده به عنوان بازتابش داخلی کلی بیان می شود. اگر  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  را در ضریب بازتاب  $p$  قرار دهیم :

$$r_p = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} = \frac{n_2 k_2 \cos\theta_1 - ik}{n_2 k_2 \cos\theta_1 + ik} \rightarrow r_p = e^{-i\delta} \quad (۳.۴۷)$$

$\tan(\delta/2) = b/a$ ، فاز موج منعکس شده را نسبت به موج فرودی مشخص می کند. بنابراین اختلاف فازهای امواج  $s$  و  $p$  در بازتابش کلی، صفر نیستند، یعنی بازتابش قطبش بیضوی دارد.

### ۳-۲-۶. امواج تخت میرا شونده غیر یکنواخت

یک موج تخت یکنواخت معمولی که در راستای  $k$ ، منتشر می شود به عنوان یک موج تخت غیر یکنواخت نامیده می شود که در راستای  $p = k_z z$  منتشر می شود:

$$E(r, t) = E e^{i(K \cdot r - \omega t)} = E e^{i(K_x x + K_y y)} e^{i(K_z z - \omega t)} = E'(x, y) e^{i(p \cdot r - \omega t)} \quad (۳.۴۸)$$

موج شکسته، نمونه ای از موج میراثونده است، چون اندازه موج میراثونده به طور نمایی در چند راستا در فضا، میرا می شود و بردار موج  $k$  در معادله موج مختلط ( $k = q + ik$ ) خواهد بود:

$$E(r, t) = E \exp[i(q \cdot r - \omega t)] \exp(-k \cdot r) \quad (۳.۴۹)$$

میدان مغناطیسی برابر با  $ZH = k \times E$  می باشد اما در هنگامی که  $k$  مختلط است و  $q$  و  $K$  موازی نیستند، دیگر معتبر نیست:

$$H(r, t) = \frac{1}{\omega \mu} K \times E \exp[i(q \cdot r - \omega t)] \exp(-k \cdot r) \quad (۳.۵۰)$$

برای محیط های غیر پراکنده، قسمت های حقیقی و موهومی  $k \cdot k = \mu \epsilon \omega^2$  از (۳.۱۴) بدست می آید:

$$q^2 - k^2 = \mu \epsilon \omega^2 \quad \text{و} \quad q \cdot k = 0 \quad (۳.۵۱)$$

اگر  $k \cdot r \rightarrow \infty$  باشد، قسمت حقیقی (۳.۴۹) و اگر می شود که این رفتار غیر فیزیکی است اما برای موجی که در نیم فضای  $Z > 0$  منتشر می شود، منطقی است. سرعت فاز یک موج فزاینده همیشه کمتر از مقدار موج تخت یکنواخت  $c/n$  است. سطوح هم فاز، صفحاتی عمود بر قسمت حقیقی بردار موج  $q$  هستند و سطوح هم دامنه، صفحاتی عمود بر قسمت موهومی بردار موج  $k$  هستند. این صفحات برای یک موج تخت معمولی، موازی یکدیگر هستند. بنابراین هنگامی که  $k$  مختلط باشد، معادلات (۳.۱۰) متعامد هندسی نیستند. به طور مشابه، معادله ماکسول  $E \cdot k = 0$  به معنای  $E^* \cdot k = 0$  نیست.

### ۳-۳. فشار تابشی

فشار تابشی، نیرویی است که در واحد سطح به جسمی وارد می شود که موج الکترومغناطیسی را بازتاب یا جذب می کند و منشا این نیرو، انتقال تکانه خطی از موج به جسم است (چگالی نیروی مکانیکی  $f$  را به چگالی تکانه میدان،  $g_{EM}$  و تانسور تنش الکترومغناطیسی  $\mathcal{T}$ ، مرتبط می کند):

$$f = -\frac{\partial g_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{T} \quad (۳.۵۲)$$

با انتگرال گیری حجم  $V$ ، سطح مقطع  $S$  و با استفاده از قضیه واگرایی، نیروی وارد بر حجم  $V$ ، برابر است با:

$$F = -\int_V d^3r \frac{\partial g_{EM}}{\partial t} + \int_S dS \hat{n} \cdot \mathcal{T} \quad (۳.۵۳)$$



اگر میدان فرودی محدود به یک بسته موج باشد، آن گاه فشار توسط نرخ زمانی تغییر  $g_{EM}$  محاسبه می شود زیرا  $S$  را می توان تا بی نهایت گسترش داد (جایی که بسته موج صفر است). اگر میدان فرودی هارمونیک زمانی باشد (در تمام فضا گسترش یابد) میانگین زمانی فشار توسط  $\mathcal{T}$  محاسبه می شود زیرا میانگین زمانی  $\partial g_{EM} / \partial t$  در هر نقطه از  $V$ ، صفر است.

### ۳-۳-۱. پایستگی متمم در ماده ساده

برای استخراج قانون بقای تکانه خطی می توان از عبارت لورنتس \_ کولن برای نیروی وارد بر بار آزاد در میدان های موجود در ماده استفاده کرد:

$$F_{free} = \int_V d^3r [\rho_f E + (j_f \times B)] = \int_V d^3r (\nabla \cdot D) E + \left( \nabla \times H - \frac{\partial D}{\partial t} \right) \times B \quad (3.54)$$

$$(\nabla \cdot B) H = 0 \text{ و } D \times (\nabla \times E) + D \times \partial B / \partial t = 0 \text{ را در سمت راست معادله بالا قرار می دهیم:}$$

$$F_{free} = \int_V d^3r \left[ (\nabla \cdot D) E + (\nabla \cdot B) H - B \times (\nabla \times H) - D \times (\nabla \times E) - \frac{\partial}{\partial t} \times (D \times B) \right] \quad (3.55)$$

$$F_{free,j} = - \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} (D \times B)_j + \int_V d^3r \left[ (\nabla \cdot D) E_j + (D \cdot \nabla) E_j - D_k \partial_j E_k \right] + \int_V d^3r \left[ (\nabla \cdot B) H_j + (B \cdot \nabla) H_j - B_k \partial_j H_k \right] + \quad (3.56)$$

چگالی نیروی میکوفسکی برابر است با:

$$f_M = \rho_f E + j_f \times B - \frac{1}{2} E^2 \nabla_\epsilon - \frac{1}{2} H^2 \nabla_\mu \quad (3.57)$$

همچنین تانسور تنش الکترومغناطیسی برابر است با:

$$T_{ij} = D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (D \cdot E + B \cdot H) \quad (3.58)$$

با استفاده از  $D = \epsilon E$  و  $B = \mu H$  به روابط  $B_k \partial_j H_k = \frac{1}{2} [\partial_j (D_k E_k) - E^2 \partial_j \epsilon]$  و  $D_k \partial_j E_k = \frac{1}{2} [\partial_j (B_k H_k) - H^2 \partial_j \mu]$  می رسمیم. این اطلاعات توسط اتحاد زیر بدست آمده اند:

$$\int_V d^3r \nabla_k (a_k b) = \int_V d^3r (\nabla \cdot a) b + \int_V d^3r (a \cdot \nabla) b \quad (3.59)$$

بنابراین رابطه (۳.۵۶) را بازنویسی می کنیم:

$$\int_V d^3r f_M = \int_V d^3r \nabla \cdot \mathcal{T} - \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} (D \times B) \quad (3.60)$$

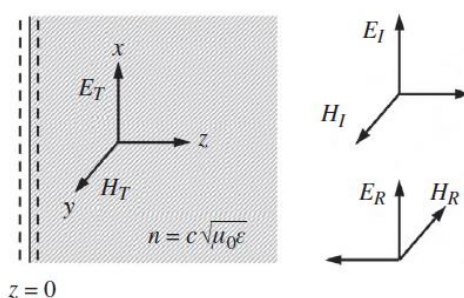
با بیان اینکه چگالی متمم مرتبط با میدان الکترومغناطیسی در ماده،  $g_M = D \times B = \epsilon \mu E \times H = \epsilon \mu S$  است، می توان رابطه (۳.۶۰) را به عنوان پایستگی خطی متمم بیان کرد. اگر  $V$ ، کوچک باشد، رابطه (۳.۶۰) به معادله پیوستگی جریان متمم خطی، کاهش می یابد:

$$\frac{\partial \mathbf{g}_M}{\partial t} + \nabla \cdot (-\mathcal{T}) = -f_M \quad (3.61)$$

### ۳-۳-۲. موج تخت هارمونیک زمانی ورودی

مطابق شکل ۳-۴، فشار تابشی فرود عمودی برای موج تخت هارمونیک زمانی (که منعکس شده و توسط یک دی الکتریک نیمه بی نهایت غیر مغناطیسی، منتقل می شود) محاسبه می شود. حجم انتگرال گیری، صفحه  $z = 0$  است، بنابراین زامین مولفه میانگین زمانی نیروی برابر است با:

$$\langle F_j \rangle = \int_S dA n_k \langle T_{kj} \rangle \quad (3.62)$$



شکل ۳-۴. موج تخت هارمونیک زمانی ورودی.

که در آن صفحات  $z = 0^+$  و  $z = 0^-$  دربرگیرنده S و تانسور تنش (۳.۵۸) هستند. میانگین زمانی تانسور تنش برابر است با:

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \epsilon |E|^2 - \mu |H|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu |H|^2 - \epsilon |E|^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon |E|^2 - \mu |H|^2 \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

پرتو این ساختار قطری، فشار تابشی میانگین زمانی را در مساحت A از صفحه  $z = 0$ ، نشان می دهد:

$$\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = \frac{\langle F_z \rangle}{A} = \langle T_{zz}(z = 0^+) - T_{zz}(z = 0^-) \rangle \quad (3.64)$$

بنابراین میدان های مورد نیاز برابرند با:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} (E_I + E_R) \hat{x} & z = 0^- \\ E_T \hat{x} & z = 0^+ \end{cases} \quad \mathbf{H} = \begin{cases} \frac{E_I - E_R}{Z_0} \hat{y} & z = 0^- \\ \frac{E_T}{Z} \hat{y} & z = 0^+ \end{cases} \quad (3.65)$$

با استفاده از  $Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$  در می یابیم که:

$$\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_I^2 \left[ 1 + \left( \frac{E_R}{E_I} \right)^2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \left( \frac{E_T}{E_I} \right)^2 \right] \quad (3.66)$$

بنابراین  $\langle F_x \rangle = \langle F_y \rangle = 0$  می‌باشد، یعنی معادله (۳.۶۶) بر حسب شدت فرودی  $I_0 = |\langle S_1 \rangle|$  می‌باشد.  $R$  ضریب بازتاب و  $T$  ضریب عبور است. از آنجا که  $\epsilon Z = n \epsilon_0 Z_0$  است، فشار تابشی بر روی سطح دی‌الکتریک برابر است با:

$$\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = \frac{I_0}{c} \epsilon_0 [1 + R - nT] = -\frac{2I_0}{c} \frac{n-1}{n+1} \quad (3.67)$$

علامت منفی نشانگر آن است که نیروی تابش به سمت بیرون دی‌الکتریک (با  $n > 1$ ) است و رابطه (۳.۶۶)، بیانگر آن است که سهم فشار تابشی از موج عبوری بیشتر از سهم موج فرودی و بازتاب است. اگر ماده موجود در ناحیه  $Z > 0$ ، تمام انرژی عبوری از سطح را جذب کند، فشار تابشی ساده‌تر می‌شود و هیچ موج عبوری وجود نخواهد داشت ( $T = 0$ )، بنابراین داریم:

$$\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = \frac{I_0}{c} [1 + R] \quad (3.68)$$

برای یک ماده جذب کننده کامل ( $R = 0$ )، داریم:  $\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = I_0/c$  و برای یک ماده بازتاب کننده کامل ( $R = 1$ )، داریم:  $\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = 2I_0/c$ .

### ۳-۴. حل تمرینات

تمرین ۱: الف. ضریب بازتاب  $r_s$  و  $r_p$  را بر حسب  $n$  و  $\mu$ ، برای هر نیم فضا بیابید.

ب. تعمیم ماده غیرمغناطیسی و فرمول مشهور  $\sin$  و  $\tan$  را بیابید.

$$r_s = \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \quad \text{و} \quad r_p = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

حل:

الف.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} = \frac{\epsilon_2 n_1}{\epsilon_1 n_2}$$

$$r_s = \frac{\mu_2 n_1 \cos\theta_1 - \mu_1 n_2 \cos\theta_2}{\mu_2 n_1 \cos\theta_1 + \mu_1 n_2 \cos\theta_2} \quad \text{و} \quad r_p = \frac{\mu_1 n_2 \cos\theta_1 - \mu_2 n_1 \cos\theta_2}{\mu_1 n_2 \cos\theta_1 + \mu_2 n_1 \cos\theta_2}$$

ب. در اینجا  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  می‌باشد. با شروع از قطبش و قانون اسنل داریم:

$$r_s = \frac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2} \times \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_2 - \cos\theta_2 \sin\theta_1}{\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_2 \sin\theta_1} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_p = \frac{n_2 \cos\theta_1 - n_1 \cos\theta_2}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2} = \frac{n_1 n_2}{n_1 n_2} \times \frac{\cos\theta_1 \sin\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_2}{\cos\theta_1 \sin\theta_1 + \cos\theta_2 \sin\theta_2}$$

در عبارت مربوط به  $r_p$ ،  $\cos\theta_1 \sin\theta_1$  را در  $\sin^2\theta_2 + \cos^2\theta_2$  ضرب می‌کنیم و  $\cos\theta_2 \sin\theta_2$  را در  $\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1$  ضرب می‌کنیم:

$$r_p = \frac{\sin\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1} \times \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2}{\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2} =$$

$$\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 + \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}$$

تمرین ۲: نشان دهید وقتی موج قطبیده P تحت بازتابش کلی داخلی باشد، آن‌گاه  $R_p = 1$  و  $T_p = 0$  می‌باشد.

حل:

$$r_p = \frac{n_2 k_2 \cos\theta_1 - i k}{n_2 k_2 \cos\theta_1 + i k} \rightarrow R = |r|^2 = 1$$

موج شکسته  $E_2$  دارای بردار موج مختلط است:

$$k_2 = k_{2x} \hat{x} + i k \hat{z}$$

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(E_2^* \times H_2) = \frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re}(E_2^* \times (k_2 \times E_2)) =$$

$$\frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re}(|E_2|^2 k_2 - (E_2^* \cdot k_2) E) = \frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re}(|E_2|^2 k_2 - (E_{2x}^* \cdot k_{2x} + i k E_{2z}^*) E) =$$

$$\frac{1}{2\omega\mu_2} \text{Re}\{i k |E_2|^2 - 2i k |E_{2z}|^2\} = 0 \quad \text{ضریب عبور موج، صفر است.}$$

تمرین ۳: با استفاده از سمت چپ رابطه (۳.۷۱)، میانگین زمانی فشار تابشی رابطه (۳.۷۷) را بیابید.

حل: چگالی نیروی مینکوفسکی برابر است با:

$$f_M = \rho_f E + j_f \times B - \frac{1}{2} E^2 \nabla_\epsilon - \frac{1}{2} H^2 \nabla_\mu$$

نیروی وارد بر مساحت A بر سطح آزاد در  $Z = 0$ ، برابر است با:

$$\langle F \rangle = \left\langle \int_V d^3r f_M \right\rangle = Z \frac{A}{4} \int_{z=0^-}^{z=0^+} E^3 \frac{d\epsilon}{dZ} dZ - \int_V d^3r \frac{\partial}{\partial t} (D \times B)$$

میدان الکتریکی در صفحه x-y قرار دارد، پس عبور از  $Z = 0$  پیوسته است و  $E_2$  از انتگرال بیرون می‌آید و معادل با میدان

$$E_T = \frac{2}{n+1} E_I \quad \text{چون } n^2 = c^2 \epsilon \mu_0 \text{ است، پس داریم:}$$

$$\langle F_z \rangle = \frac{A}{4} E_T^2 (\epsilon - \epsilon_0) = \frac{A}{4} \epsilon_0 \left[ \frac{2}{n+1} E_T \right]^2 (n^2 - 1)$$

شدت موج فرودی، اندازه بردار پوئین تینگ فرودی است :

$$I_0 = |S_I| = \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 E_T^2$$

$$\langle \mathcal{P}_{rad} \rangle = \frac{\langle F_Z \rangle}{A} = -\frac{2I_0}{c} \frac{n-1}{n+1}$$

## فصل چهارم : امواج در محیط‌های پراکنده

### ۴-۱. پراکندگی فرکانسی

پراکندگی فرکانسی ضریب شکست ماده به این علت رخ نمی‌دهد که ماده نمی‌تواند به‌طور آنی به تحریک خارجی، پاسخ دهد. این پدیده همچنین در مدارهای جریان متناوب AC با امپدانس مختلط  $Z(\omega)$  وابسته به فرکانس دیده می‌شود. اگر ضریب هدایت، وابستگی زمانی  $\sigma(\tau)$  داشته باشد و تأخیر زمانی وقتی روی دهد که اصرار به علی بودن ماده داشته باشیم، آنگاه چگالی جریان  $j(r, t)$ ، به میدان الکتریکی (در زمان‌های قبل تر از  $t$ ) بستگی دارد اما به میدان الکتریکی زمان‌های بعد از  $t$  بستگی ندارد. اگر آن را به پاسخ خطی ماده به میدان الکتریکی محدود کنیم، داریم:

$$j(r, t) = \int_{-\infty}^t dt' \sigma(t - t') E(r, t') \quad (۴.۱)$$

از آنجا که میدان الکتریکی در زمان‌های دور، تأثیر کمی بر چگالی جریان زمان حال دارد، پس  $\sigma(\tau) \rightarrow 0$  و  $\tau \rightarrow \infty$  می‌باشد. حد بالای انتگرال را به  $\infty$  توسعه می‌دهیم و رسانندگی را برابر با  $\sigma(\tau < 0) = 0$  قرار می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$j(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \sigma(t - t') E(r, t') \quad (۴.۲)$$

تعریف انتگرال فوریه به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\sigma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \sigma(t) e^{i\omega t} \quad \sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\sigma}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (۴.۳)$$

نمایش تبدیل فوریه چگالی جریان و میدان الکتریکی برابر است با:

$$j(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{j}(r, \omega) e^{-i\omega t} \quad E(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{E}(r, \omega) e^{-i\omega t} \quad (۴.۴)$$

قضیه پیچش را به تبدیل فوریه اعمال می‌کنیم:

$$j(r, \omega) = \hat{\sigma}(\omega) \hat{E}(r, \omega) \quad (۴.۵)$$

رسانایی  $\hat{\sigma}(\omega)$  همانند  $\hat{Z}(\omega)$ ، یک تابع پاسخ خطی مختلط است و معادل سازی معادلات اخیر با همیوگ مختلط و تغییر متغیرهای انتگرال گیری از  $\omega$  به  $-\omega$ ، نشان می‌دهد که:

$$\hat{\sigma}(-\omega) = \hat{\sigma}^*(\omega) \rightarrow \sigma'(\omega) = \sigma'(-\omega) \quad \text{و} \quad \sigma''(\omega) = -\sigma''(-\omega) \quad (۴.۶)$$

### ۴-۱-۱. معادل سازی توصیف‌های جایگزین

وابستگی فرکانسی پذیرفتاری مغناطیسی، الکتریکی، گذردهی الکتریکی و تراوی مغناطیسی برابر با توابع غیر مستقل زیر است:

$$\begin{cases} \hat{p}(r, \omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}_e(\omega) \hat{E}(r, \omega) \\ M(r, \omega) = \hat{\chi}_m(\omega) \hat{H}(r, \omega) \\ \hat{D}(r, \omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \hat{E}(r, \omega) \\ \hat{B}(r, \omega) = \hat{\mu}(\omega) \hat{H}(r, \omega) \end{cases} \quad (۴.۷)$$

برای میدان‌های استاتیکی، تشخیص جابجایی بلند برد بار آزاد از جابجایی کوتاه برد بار قطبش، آسان است. این تمایز هنگامی سخت است که  $E(r, t)$  هارمونیک زمانی باشد زیرا بار در هر دو مورد به سمت جلو و عقب، نوسان می‌کنند. در فرکانس‌های بالا، هیچ راهی برای تشخیص یک جریان رسانش هارمونیک زمانی با چگالی  $\sigma E = j$  از جریان قطبش هارمونیک زمانی با چگالی  $j = \partial P / \partial t$  وجود ندارد. پس معادله  $\hat{p}(r, \omega) = \epsilon_0 \hat{\chi}_e(\omega) \hat{E}(r, \omega)$  را معادل با چگالی جریان  $\hat{j}(r, \omega) = \hat{\sigma}(\omega) \hat{E}(r, \omega)$  قرار می‌دهیم:

$$j(r, \omega) = -i\omega \hat{P}(r, \omega) = -i\omega \epsilon_0 \hat{\chi}_e(\omega) \hat{E}(r, \omega) \quad (۴.۸)$$

این رابطه  $\hat{\sigma}(\omega)$  را با  $\hat{\chi}_e(\omega)$  مرتبط می‌کند:

$$D(r, \omega) = \epsilon_0 \hat{E}(r, \omega) + \hat{P}(r, \omega) = \hat{\epsilon}(\omega) \hat{E}(r, \omega) \quad (\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{\sigma(r, \omega)}{\omega}) \quad (۴.۹)$$

تمایز بین چگالی جریان قطبش و چگالی جریان مغناطیسی با استفاده از روابط  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$  و  $\mu = \mu_0(1 + \chi)$  بدست می‌آید:

$$j = \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M \quad (۴.۱۰)$$

همچنین با استفاده از  $\nabla \times B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$  داریم:

$$j = \frac{\chi_e + \chi_m + \chi_e \chi_m}{\chi_e} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\chi_e + \chi_m + \chi_e \chi_m}{\chi_m(1 + \chi_e)} \nabla \times M \quad (۴.۱۱)$$

بنابراین جریان‌های وابسته به زمان در ماده به صورت اثرات قطبش، مغناطش و یا ترکیب هر دو توصیف می‌شود. برای سیستم‌های ماده چگال در فرکانس‌های پایین از فرکانس اپتیکی از  $\hat{\epsilon}(\omega)$ ،  $\hat{\mu}(\omega)$  و یون‌یابی از حالت استاتیکی، استفاده می‌شود. یعنی  $M = 0$  و ساخت تمام اثرات الکتریکی و مغناطیسی به یک تابع دی‌الکتریک موثر یا هدایت موثر، نسبت داده می‌شود.

## ۲-۴. انرژی در مواد پراکنده

پراکنندگی فرکانس تأثیر زیادی بر توانایی یک محیط برای ذخیره و اتلاف انرژی الکترومغناطیسی دارد:

$$\int_V d^3r \left[ E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} \right] = - \int_V d^3r j_{ext} \cdot E - \int_V d^3r \nabla \cdot (E \times H) \quad (۴.۱۲)$$

در رابطه (۴.۱۲) از  $\hat{\epsilon}(\omega)$  و  $\hat{\mu}(\omega)$  استفاده می‌کنیم تا شامل تمام اثرات الکتریکی و مغناطیسی شود و از جریان آزاد، صرف نظر شود:

$$E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} + H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + Q(t) = \text{انرژی از دست رفته در واحد حجم} + \text{تغییرات چگالی انرژی الکترومغناطیسی} \quad (۴.۱۳)$$

$u_{EM}$  وابسته به قسمت حقیقی  $\hat{\epsilon}(\omega)$  و  $\hat{\mu}(\omega)$  است و  $Q(t)$  وابسته به قسمت موهومی آنها است. با استفاده از جمله سمت چپ (۴.۱۲)، میدان را به صورت حقیقی می‌نویسیم:

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{E}(r, \omega)e^{-i\omega t} + \hat{E}^*(r, \omega)e^{i\omega t}] \quad (۴.۱۴)$$

با حذف وابستگی  $t$  داریم:

$$D(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{\epsilon}(\omega)\hat{E}(\omega)e^{-i\omega t} + \hat{\epsilon}^*(\omega)\hat{E}^*(\omega)e^{i\omega t}] \quad (۴.۱۵)$$

با استفاده از خاصیت  $\hat{\epsilon}^*(\omega) = \hat{\epsilon}(-\omega)$  و تغییر علامت متغیر  $\omega \rightarrow -\omega$  در یکی از روابط (۴.۱۴) یا (۴.۱۵)، داریم:

$$\begin{cases} E(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{E}(\omega) + \hat{E}^*(-\omega)]e^{-i\omega t} \\ D(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{\epsilon}(-\omega) + \hat{\epsilon}^*(\omega)]\hat{E}^*(\omega)e^{i\omega t} \end{cases} \quad (۴.۱۶)$$

در نتیجه داریم:

$$E \cdot \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\hat{E}(\omega_1) + \hat{E}^*(-\omega_1)][\hat{E}(\omega_2) + \hat{E}^*(-\omega_2)] \times \\ i\omega_2 \hat{\epsilon}^*(\omega_2) \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (۴.۱۷)$$

در رابطه (۴.۱۷)، تغییر متغیرهای  $\omega_1 \rightarrow -\omega_1$  و  $\omega_2 \rightarrow -\omega_2$  را اعمال می‌کنیم:

$$E \cdot \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\hat{E}(\omega_1) + \hat{E}^*(-\omega_1)][\hat{E}(\omega_2) + \hat{E}^*(-\omega_2)] \times \\ [i\omega_2 \hat{\epsilon}^*(\omega_2) - \omega_1 \hat{\epsilon}(\omega_1)] \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (۴.۱۸)$$

با استفاده از  $\epsilon''(-\omega) = -\epsilon''(\omega)$  داریم:

$$\omega_2 \hat{\epsilon}^*(\omega_2) - \omega_1 \hat{\epsilon}(\omega_1) = \omega_2 \epsilon'(\omega_2) - \omega_1 \epsilon'(\omega_1) - i[\omega_2 \epsilon''(\omega_2)\omega_1 \epsilon''(\omega_1) +] \quad (۴.۱۹)$$

بنابراین به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$E \cdot \frac{\partial D(t)}{\partial t} = \frac{\partial U_E}{\partial t} + Q_E \quad (۴.۲۰)$$

که در اینجا داریم:



$$U_E(t) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 [\hat{E}(\omega_1) + \hat{E}^*(-\omega_1)][\hat{E}(\omega_2) + \hat{E}^*(-\omega_2)] \times \\ \frac{\omega_2 \epsilon'(\omega_2) - \omega_1 \epsilon'(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \quad (۴.۲۱)$$

$$Q_E(t) = E(t) \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [\hat{E}(\omega) + \hat{E}^*(-\omega)] \omega \epsilon''(\omega) \exp(-i\omega t) \quad (۴.۲۲)$$

به طور مشابه، جمله دوم سمت چپ معادله (۴.۱۲)، با استفاده از  $\hat{B}(\omega) = \hat{\mu}(\omega)\hat{H}(\omega)$  بدست می‌آید:

$$H \cdot \frac{\partial B(t)}{\partial t} = \frac{\partial U_H}{\partial t} + Q_H \quad (۴.۲۳)$$

$U_{EM}(t) = U_H(t) + U_E(t)$  و  $Q(t) = Q_E(t) + Q_H(t)$  تأیید می‌شود. با استفاده از  $E \rightarrow H$  و  $\epsilon \rightarrow \mu$ ، مشابه (۴.۲۱) و (۴.۲۲) هستند. بنابراین، رابطه (۴.۱۳) با  $U_{EM}(t)$  و  $Q(t)$  با  $Q_E(t) + Q_H(t)$  و  $U_E(t) + U_H(t)$  مطابقت دارد.

### ۴-۲-۱. میدان‌های شبه تک فام

اندازه فوریه  $\hat{E}(\omega)$  و  $\hat{B}(\omega)$  حول یک فرکانس منفرد، پیک دارد. پایین‌ترین بسط تیلور این میدان‌ها، انرژی نهایی ذخیره شده در محیط را با استفاده از (۴.۲۱) و (۴.۲۲)، بدست می‌آورد:

$$U_{EM}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \epsilon'(\omega)] |E(t)|^2 + \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \mu'(\omega)] |H(t)|^2 \right\} \quad (۴.۲۴)$$

و نرخ جذب انرژی برابر است با:

$$Q(t) = \omega [\epsilon''(\omega) |E(t)|^2 + \mu''(\omega) |H(t)|^2] \quad (۴.۲۵)$$

$\hat{E}(\omega)$  و  $\mu(\omega)$  باید به آرامی تغییر کنند تا روابط بالا برقرار باشند و نادیده گرفتن مشتقات اول و دوم به ترتیب در (۴.۲۵) و (۴.۲۴) توجیه شود. با تقریب توابع سازنده به عنوان ثابت‌های مستقل از فرکانس، معادله (۴.۲۴) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$U_{EM}(t) = \frac{1}{2} \{ \epsilon |E(t)|^2 + \mu |H(t)|^2 \} \quad (۴.۲۶)$$

چون میزان تولید گرما توسط میدان‌های الکتریکی و یا مغناطیسی در ماده دارای افت مثبت است، بنابراین  $\epsilon''(\omega) > 0$  و  $\mu''(\omega) > 0$  می‌باشند. با غیر صفر شدن  $\epsilon''(\omega)$  و  $\mu''(\omega)$  در قسمت‌های موهومی هر فرکانسی، اتلاف انرژی رخ می‌دهد. چون اگر  $\epsilon'(\omega)$  ثابت نباشد،  $\epsilon''(\omega)$  در همه جا صفر است، یعنی وجود پراکندگی فرکانس کافی است تا اتلاف انرژی را ثابت کند.

### ۴-۳. امواج طولی و عرضی

وابستگی فضایی دامنه‌های فوریه میدان‌ها را با  $\exp(ik \cdot r)$  در نظر می‌گیریم و از معادلات ماکسول در ماده استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \hat{\mu}(\omega) \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \rightarrow \quad \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \hat{\epsilon}(\omega) \mathbf{E} \end{cases} \quad (۴.۲۷)$$

با ترکیب معادلات (۴.۲۷)، معادله پراکندگی بدست می‌آید:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E} = -\omega^2 \hat{\mu}(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) \mathbf{H} \quad (۴.۲۸)$$

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  را در (۴.۲۸) قرار می‌دهیم تا با معادله ماکسول  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  برای یک سیستم بار خنثی، مطابقت داشته باشد. و  $\mathbf{E}$  را به دو جز طولی و عرضی تجزیه می‌کنیم ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ ). معادله (۴.۲۸) با توجه به  $\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$  و  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0$  برابر می‌شود با:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\mathbf{E}_{\perp} = -\omega^2 \hat{\mu}(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) (\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}) \quad (۴.۲۹)$$

معادله (۴.۲۹) دو شرط را تعریف می‌کند (جدول ۴-۱):

توضیحات	نوع شرط
$[\omega^2 \hat{\mu}(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}]\mathbf{E}_{\perp} = 0 \rightarrow \mathbf{k}(\omega) = \omega \sqrt{\hat{\mu}(\omega) \hat{\epsilon}(\omega)} = \frac{\omega}{c} \hat{n}(\omega) \rightarrow$	پراکندگی امواج عرضی
$\hat{\mathbf{Z}}(\omega) \mathbf{H}_{\perp} = \sqrt{\frac{\hat{\mu}(\omega)}{\hat{\epsilon}(\omega)}} \mathbf{H}_{\perp} = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_{\perp}$	
$\hat{\mu}(\omega) \hat{\epsilon}(\omega) \mathbf{E}_{\parallel} = 0$	پراکندگی امواج طولی

جدول ۴-۱. شرط‌های پراکندگی امواج در معادله (۴.۲۹).

#### ۴-۴. مدل‌های کلاسیک برای پراکندگی فرکانس

##### ۴-۴-۱. مدل درود برای ماده رسانا

چون رسانش  $\sigma_0 = nq^2\tau/m$  برای  $n$  ذره (دارای بار  $q$  و جرم  $m$ ) که در مدت زمان واهلش  $\tau$  قبل از برخورد تغییر دهنده ممتد، مسافتی را طی می‌کند، پس میدان الکتریکی هارمونیک، یک جریان هارمونیک وابسته به زمان و یک رسانش مختلط  $\hat{\sigma}(\omega)$  تولید می‌کند. برای یافتن آن، از رابطه  $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{E}} \exp(-i\omega t)$  و از معادله حرکت نیوتن برای سرعت  $v$  یک ذره استفاده می‌کنیم:

$$m \frac{dv}{dt} = q\hat{\mathbf{E}} e^{-i\omega t} - \frac{mv}{\tau} \quad (۴.۳۰)$$

پاسخ هارمونیک زمانی  $v(t)$  برابر است با:

$$v(t) = \frac{q\hat{\mathbf{E}}/m}{1/\tau - i\omega} e^{-i\omega t} = \hat{v}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (۴.۳۱)$$

چگالی جریان هارمونیک زمانی برابر است با:

$$\hat{j}(\omega) = nq\hat{v}(\omega) = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{\hat{E}}{1-i\omega\tau} = \hat{\sigma}(\omega)\hat{E}(\omega) \quad (۴.۳۲)$$

با استفاده از رابطه (۴.۳۲) به ضریب رسانش مختلط درود وابسته به فرکانس می‌رسیم:

$$\hat{\sigma}(\omega) = \frac{nq^2\tau/m}{1-i\omega\tau} = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau} \quad (۴.۳۳)$$

بنابراین فرکانس پلاسما برابر با  $\omega_p^2 = nq^2/\epsilon_0 m$  می‌باشد. با قرار دادن رابطه (۴.۳۳) در  $\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 + i \frac{\sigma(r,\omega)}{\omega}$  تابع دی‌الکتریک درود بدست می‌آید:

$$\frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} = \left[ 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1-\omega^2\tau^2} \right] + i \left[ \frac{\omega_p^2\tau}{\omega} \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} \right] \quad (۴.۳۴)$$

اگر زمان پراکندگی و فرکانس پلاسما با شرط  $\frac{1}{\tau} \leq \omega_p$  منطبق باشد، آنگاه حد فرکانس پایین برابر می‌شود با:

$$\frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \approx 1 + i \frac{\omega_p^2\tau}{\omega} \quad (\omega\tau \leq 1) \quad (۴.۳۵)$$

امواج تخت عرضی که در این محیط منتشر می‌شوند، به صورت نمایی افت می‌کنند و عمق پوسته از رابطه  $\delta(\omega) = \sqrt{2/\mu\sigma_0\omega}$  که مقیاس طول برای افت است، بدست می‌آید. حد فرکانس بالا برابر است با:

$$\frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \approx 1 - i \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad (\omega\tau \gg 1) \quad (۴.۳۶)$$

## ۲-۴-۴. امواج عرضی

در محدوده فرکانس‌های بالا (۴.۳۶)، رابطه پراکندگی امواج عرضی  $\left( k(\omega) = \omega\sqrt{\hat{\mu}(\omega)\hat{\epsilon}(\omega)} = \frac{\omega}{c}\hat{n}(\omega) \right)$ ، برابر با  $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$  می‌باشد (جدول ۴-۲).

رابطه مربوطه	نوع موج
$\omega = \omega_p$	$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$ تلاقی صفر را مطابق با رابطه (۴.۳۶) بررسی می‌کند.
$\omega > \omega_p$	موج منتشر شونده با یک بردار موج حقیقی
$\omega < \omega_p$	موج میراثونده با یک بردار موج مجازی

جدول ۴-۲. بررسی امواج عرضی.

هنگام عبور  $\omega$  از  $\omega_p$ ، تابع دی‌الکتریک (۴.۳۶) از منفی به مثبت، تغییر علامت خواهد داد و ضریب شکست از  $\hat{n} = 1$  به  $\hat{n} = 1$  تغییر می‌کند و بازتاب فرودی برابر خواهد بود با:

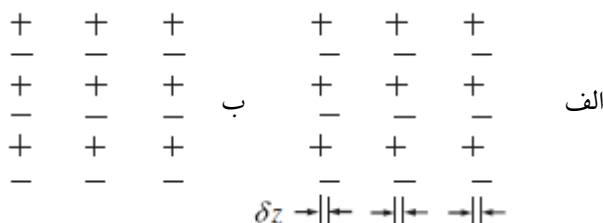
$$R(\omega) = \left| \frac{\hat{n}-1}{\hat{n}+1} \right|^2 = \frac{(\hat{n}-1)^2 + n'^2}{(\hat{n}+1)^2 + n'^2} \quad (۴.۳۷)$$

تغییر ناگهانی از یک به صفر، باعث تاثیر در رفتار امواج عبوری و بازتابی می‌شود (نوسان قطبش محیط). اگر  $\omega < \omega_p$  شود، محیط دو موج، تابشی می‌شود (موج منتشر شونده، منعکس می‌شود و موج عبوری، تداخل ویرانگر با موج فرودی

دارد). هنگامی که  $\omega > \omega_p$ ، نوسان قطبش یک تغییر در فاز و مکان موج منعکس شده ایجاد می کند و یک موج عبوری ایجاد می کند (این تغییر فاز یادآور رفتار نوسانگر هارمونیک است هنگامی که فرکانس آن بالا یا پایین فرکانس طبیعی است).

### ۳-۴-۴. امواج طولی

رابطه  $\hat{\mu}(\omega)\hat{\epsilon}(\omega)E_{\parallel} = 0$  مربوط به امواج طولی است و مدل درود شامل این امواج نمی شود چون رابطه  $[k \cdot E_{\perp} - k \cdot \hat{\mu}(\omega)\hat{\epsilon}(\omega)]$  هرگز صفر نخواهد شد. البته چون تابع دی الکتریک (۴.۳۶) در  $\omega = \omega_p$  صفر می شود، طبق رابطه پراکندگی، محیط درود امواج  $k \parallel E$  را پشتیبانی می کند و فرکانس  $\omega = \omega_p$  وابسته به بردار موج  $k$  نیست. پس  $B = 0$  از رابطه  $k \times E_{\perp} = 0$  بدست می آید و با توجه به قانون گاوس  $k \cdot E_{\parallel} = \rho/\epsilon_0$  هنگامی که موج وجود دارد، چگالی بار موضعی، صفر نیست. مطابق شکل ۴-۱، هر لایه بار منفی جابجا شده، تشکیل صفحه خازن با لایه مثبت می دهد. میدان الکتریکی بین صفحات  $E = \hat{z}en\delta z/\epsilon_0$  یک نیروی بازگرداننده به بار منفی وارد می کند.



شکل ۴-۱. الف. جابجایی جمعیت بار منفی به مقدار  $\delta z$ . ب. یک ماده خنثی با بارهای مثبت ساکن و بارهای منفی متحرک.

جرم هر لایه منفی  $M = mn\delta z$  و  $Q = -en\delta z$  می باشد، بنابراین معادله حرکت جابجایی لایه برابر با  $M\delta \ddot{z} = QE$  یا  $\delta \ddot{z} = -\delta ze^2n/m\epsilon_0 = -\omega_p^2\delta z$  می شود.  $\delta z(t)$  در غیاب میرایی، به طور نامحدود در فرکانس پلاسما  $\omega_p^2 = nq^2/\epsilon_0m$  نوسان می کند و این نوسان پلاسمایی، مد نرمال سیستم است. همه صفحات خازن در فرکانس  $\omega_p$ ، مستقل از دیگر صفحات، نوسان می کنند و شرایط اولیه در  $t = 0$  برای صفحات باردار منفی می تواند از یک خازن به خازن دیگر (در یک رفتار موج مانند) متفاوت باشد.

### ۴-۴-۴. مدل لورنتس برای ماده دی الکتریک

اگر  $n$  اتم مستقل متشکل از الکترونهایی به جرم بی نهایت و فرکانس طبیعی  $\omega_0$  را در نظر بگیریم و فرآیندهای میرایی دارای ثابت  $\Gamma$  باشند، آنگاه جابجایی هر الکترون از مکان تعادلش، توسط معادله حرکت زیر بیان می شود:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + m\Gamma \frac{dr}{dt} + m\omega_0^2 r = -eE \quad (4.38)$$

در حالت پایا  $r(t)$  و  $E(t)$  با  $e^{-i\omega t}$  نوسان می کنند:

$$r(t) = \frac{-e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} E(t) \quad (4.39)$$

همچنین دو قطبی الکتریکی در واحد حجم برابر است با :

$$P(t) = n P(t) = -ner(t) = \frac{-ne^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} E(t) \quad (۴.۴۰)$$

بنابراین با استفاده از فرکانس پلاسما به نتایج زیر می‌رسیم :

$$n^2(\omega) = \frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma} \rightarrow \frac{\hat{\epsilon}'(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\Gamma^2} \rightarrow$$

$$\frac{\hat{\epsilon}''(\omega)}{\epsilon_0} = \frac{\omega_p^2 \omega \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2\Gamma^2} \quad (۴.۴۱)$$

در ناحیه  $\omega < \omega_0$  ، میدان با قطبش هم‌فاز، نوسان می‌کند و ناحیه  $n'(\omega) = \sqrt{\hat{\epsilon}'(\omega)/\epsilon_0}$  با افزایش فرکانس، افزایش می‌یابد ( این یک پراکندگی عادی است چون منشور، رنگ آبی را بیشتر از قرمز می‌شکند). اگر یک باند فرکانسی با پهنای  $\Gamma$  حول  $\omega_0$  باشد و  $n'(\omega)$  با افزایش فرکانس، سریعاً کاهش می‌یابد ( این یک پراکندگی غیرعادی است و به آسانی قابل مشاهده نیست چون محیط انرژی زیادی از موج جذب می‌کند). همچنین در ناحیه  $\omega > \omega_0$  ، قطبش القا شده خارج از فاز با میدان اعمال‌شده، نوسان می‌کند و دارای پراکندگی عادی است. در اکثر سیستم‌های چگال، تابع دی‌الکتریک با محاسبه قطبش نهایی و جمع توزیع نوسانگرهای لورنتس بیان می‌شود. اگر ضریب شکست در اشعه  $X$  ، کمتر از یک باشد ( که منجر به بازتابش داخلی کلی می‌شود) و در معادله (۴.۴۱) ،  $\omega$  بزرگتر از بزرگترین انرژی برانگیختگی باشد آنگاه می‌توان از  $\hat{\epsilon}''(\omega)$  صرف نظر کرد :

$$n^2(\omega) \approx \frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} < 1 \quad (۴.۴۲)$$

#### ۴-۴-۵. مدل پلاسمای مغناطیده

مدل پلاسمای مغناطیده (مدل درود بدون برخورد) ، یک تابع دی‌الکتریک تقریبی است که از قطبش وابسته به زمان بدست آمده و دارای  $n$  الکترون در واحد حجم است که تحت میدان الکتریکی موج و میدان خارجی  $B_0$  حرکت می‌کنند. اگر الکترون  $i$  ام پلاسما از معادله حرکت کلاسیک  $m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = -e(E + B \times dr_i/dt)$  پیروی کند، آنگاه معادله حرکت قطبش  $P = -\left(\frac{e}{V}\right) \sum_i r_i$  برابر خواهد بود با :

$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \epsilon_0 \omega_p^2 E - \omega_c \frac{dP}{dt} \times Z \quad \left( \begin{array}{l} \omega_c = \text{فرکانس سیکلوترون الکترون} \\ \omega_p^2 = \text{فرکانس پلاسما الکترون} \end{array} \right) \quad (۴.۴۳)$$

باید به دنبال حالت‌های پایه  $P(t) = Pe^{-i\omega t}$  و  $E(t) = Ee^{-i\omega t}$  باشیم، پس به مولفه‌های دکارتی زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} -\omega^2 P_x = \epsilon_0 \omega_p^2 E_x + i\omega \omega_c P_y \\ -\omega^2 P_y = \epsilon_0 \omega_p^2 E_y - i\omega \omega_c P_x \\ -\omega^2 P_z = \epsilon_0 \omega_p^2 E_z \end{cases} \quad (۴.۴۴)$$

در (۴.۴۴)، از مولفه‌های  $E$  در توصیف هر مولفه از  $P$  استفاده می‌شود و همچنین به دلیل  $D = \epsilon_0 E + P$  از تابع  $D = \epsilon_0 E$  استفاده می‌شود تا به یک تابع دی‌الکتریکی برسیم که پلاسمای غیرمغناطیده را به یک محیط غیرهمگن تبدیل کند.

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} & 0 \\ -i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{bmatrix} \quad (۴.۴۵)$$

بنابراین معادله پراکندگی امواج برابر است با:

$$(k \cdot k)E - k(k \cdot E) = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\hat{\epsilon}(\omega)}{\epsilon_0} \cdot E \quad (۴.۴۶)$$

باید به دنبال پاسخ‌هایی باشیم که ثابت کنند  $k \parallel B_0$  می‌باشد، پس معادله (۴.۴۵) بهترین پاسخ برای میدان الکتریکی هارمونیک  $E = E_z \hat{z}$  با  $\omega = \omega_p$  است. این موج، الکتروستاتیک طولی را بازتولید می‌کند، چون میدان الکتریکی ذرات باردار را موازی با  $B_0$  به حرکت درمی‌آورد و نیروی مغناطیسی لورنتس بر آنها اثری ندارد. بنابراین به پاسخ می‌رسیم و امواج عرضی  $E$  و  $B$  که عمود بر  $k \parallel B_0$  هستند، بدست می‌آیند. با استفاده از  $n = ck/\omega$  معادله پاسخ نهایی بدست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} -n^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} & i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \\ -i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{(\omega^2 - \omega_c^2)} & -n^2 + 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0 \quad (۴.۴۷)$$

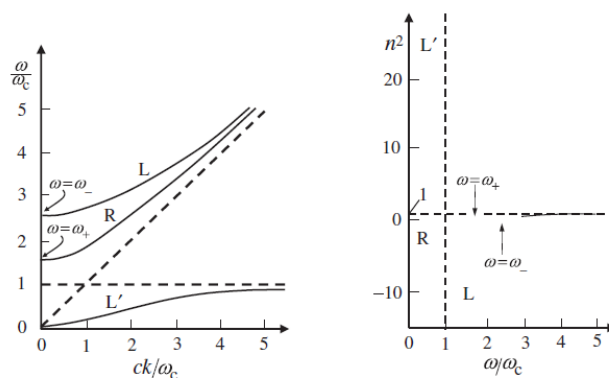
اگر دترمینان ضریب برابر با  $n_{\pm}^2 = 1 - \omega_p^2/\omega(\omega \pm \omega_c)$  باشد، با قرار دادن آن در معادله (۴.۴۷) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} E_x = iE_y & \text{قطبش دایروی راست گرد} \\ E_x = -iE_y & \text{قطبش دایروی چپ گرد} \end{cases} \quad (۴.۴۸)$$

همچنین سرعت‌های فاز LCP و RCP، یکسان نیستند ( $n_+ \neq n_-$ ). شکل ۲-۴، معادله پراکندگی  $n_{\pm}^2$  را با استفاده از  $\omega_p = 2\omega_c$  و به دو روش نشان می‌دهد در قسمت الف این شکل،  $R$  مربوط به  $n_+^2(\omega)$ ، و  $L$  و  $L'$  مربوط به دو ریشه  $n_-^2(\omega)$  است. با استفاده از تابع دی‌الکتریک درود به این نتیجه می‌رسیم که هنگامی که  $n_{\pm}^2$  به صفر میل می‌کند، در فرکانس قطع  $\omega = \omega_{\pm}$  دچار بازتاب موج می‌شود و هنگامی که  $n_{\pm}^2$  به مثبت بی‌نهایت میل می‌کند، در فرکانس تشدید  $\omega = \omega_c$  دچار جذب موج می‌شود. در قسمت ب این شکل، نیز برچسب زنی  $\omega(k)$  با قطبش دایروی راست گرد و چپ گرد انجام می‌شود:

$$\begin{cases} \omega_+ \rightarrow n_+^2(\omega) = 0 \\ \omega_- \rightarrow n_-^2(\omega) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{\omega_{\pm}}{\omega_c} = \frac{\mp 1 + \sqrt{1 + 4\frac{\omega_p^2}{\omega_c^2}}}{2} \quad (۴.۴۹)$$

در باند فرکانسی بین  $\omega_+$  و  $\omega_c$ ، هیچ پاسخ موج ماندی وجود ندارد و هنگامی که  $\omega_p < \omega_c$  باشد، این باند از بین می‌رود. امواج با قطبش دایره‌ای راست (R) و امواج با قطبش دایره‌ای چپ (L) در بالای فرکانس پلاسمای مدل درود، نوسان می‌کنند. همچنین جایگاه فرکانس قطع  $\omega_{\pm}$  مهم است چون امواج منتشر شونده در  $n^2 > 0$  اتفاق می‌افتند. یک موج قطبیده دایروی که از خلا به یک پلاسمای مغناطیده (در فرکانس  $\omega < \omega_+$  برای LCP یا  $\omega < \omega_-$  برای RCP) از سطح پلاسمای منعکس می‌شود، چون یک مد با  $n^2(\omega) < 0$ ، بردار موج موهومی محض دارد و این موج غیرمنتشر شونده و به طور نمایی میرا است. در ادامه برای موج  $L'$ ، میدان الکتریکی موج سیکلوترون الکترون در دو جهت و سرعت مشابه با حرکت الکترون‌هایی که با  $B_0$  القا می‌شوند، می‌چرخند. سرعت فاز این موج به صفر میل می‌کند و ضریب شکست واگرا می‌شود. هنگامی که  $\omega \rightarrow \omega_c$  باشد، به طور تشدیدی به الکترون‌ها انرژی می‌دهد. هنگامی که  $k \rightarrow 0$  باشد، فرکانس مد  $L'$  به  $\omega \rightarrow 0$  میل می‌کند.

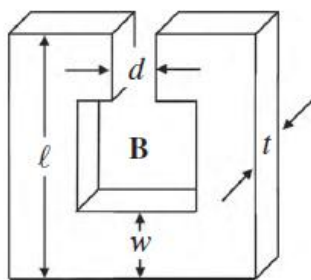


شکل ۴-۲. پراکندگی فرکانس امواج الکترومغناطیسی عرضی در پلاسمای مغناطیسی با  $k \parallel B_0$  و  $\omega_p = 2\omega_c$ : (الف) ضریب شکست در برابر فرکانس. (ب) فرکانس در مقابل بردار موج (R امواج با قطبش دایره‌ای راست و L امواج با قطبش دایره‌ای چپ می‌باشند).

#### ۴-۴-۶. مدل رینگ شکسته برای ماده‌ای با ضریب شکست منفی

ضریب شکست منفی به دلیل منفی بودن همزمان  $\epsilon$  و  $\mu$  ایجاد می‌شود اما این اتفاق در مواد طبیعی رخ نمی‌دهد، پس باید از ساختار مصنوعی  $n = -c\sqrt{\mu\epsilon} < 0$  استفاده کرد. طبق مدل‌های لورنتس و درود، ایجاد  $\epsilon < 0$  در محدوده یک فرکانس خاص، آسان است. پس باید موادی با مختصات  $\mu(\omega) < 0$  در همان باند ایجاد کرد. در شکل ۴-۳، یک تشدیدگر حلقوی را نشان می‌دهد که دارای کریستال‌های مصنوعی است و این کریستال‌ها همانند اتم‌ها در کریستال‌های طبیعی عمل می‌کنند تا به یک  $n(\omega) < 0$  در فرکانس‌های مادون قرمز و بالاتر برسند. البته شرط رسیدن به نتیجه، انتخاب اندازه و فاصله مناسب برای رینگ‌های شکسته است. عمق پوسته در این فرکانس‌ها آنقدر کم است که میدان‌های مغناطیسی

و الکتريکی به حلقه‌های درونی نفوذ نمی‌کنند، تمام جریان‌های القا شده بر روی سطح می‌چرخند و ممان‌های مغناطیسی تولید شده از مرتبه بزرگتر از ممان‌های مغناطیسی القا شده در اتم‌ها و مولکول‌ها خواهند بود.



شکل ۴-۳. یک تشدیدگر حلقوی که برای ساخت مواد با ضریب شکست منفی استفاده می‌شود.

جریان‌های چرخنده در یک مدل مدار برجسته، یک القاگر موثر  $L$ ، یک میدان الکتريکی و یک خازن  $C$  تولید می‌کنند. میدان مغناطیسی نوسان‌کننده در هر حلقه یک مد الکترومغناطیسی با فرکانس  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  برانگیخته می‌کند. اگر آن را با یک خازن مقایسه کنیم که دارای صفحات موازی و  $C = \epsilon_0 \omega t/d$  می‌باشد، آنگاه حلقه در یک القاگر به صورت یک سیم لوله با طول  $t$  است یعنی  $L = \mu_0 \ell^2/t$ . پس فرکانس تشدید حلقه شکسته برابر است با:

$$\omega_0 = \frac{c}{\ell} \sqrt{\frac{d}{\omega}} \quad (۴.۵۰)$$

برای محاسبه پذیرفتاری  $\mu(\omega)$  از رابطه  $\mu(\omega) = \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu H$  استفاده می‌شود. مطابق شکل ۶-۱، مغناطش  $M = \chi_m H$  با یک میدان مغناطیسی خارجی  $B \exp(-i\omega t)$ ، القا شده و متمایل به عمود بر صفحه است. ممان مغناطیسی یک حلقه شکاف‌دار تک  $m = \ell^2 I$  که در آن جریان القا شده در حلقه توسط قانون ولتاژ کیرشهف تعمیم داده شده، شامل ولتاژ EMF فاراده القا شده در یک حلقه با شار  $\Phi_B$  میدان مغناطیسی خارجی است:

$$I + \frac{I}{LC} + \frac{1}{L} \frac{d^2 \Phi_B}{dt^2} = 0 \quad (\Phi_B = \ell^2 B \exp(-i\omega t)) \quad (۴.۵۱)$$

اگر فاصله بین تشدیدگرهای مجاور برابر با  $a$  باشد، آنگاه مغناطش وابسته به فرکانس برابر است با:

$$M = \frac{\ell^2 t}{a^3} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} H \quad (۴.۵۲)$$

همچنین نسبت بدون بعد  $f = \ell^2 t/a^3 < 1$  فاکتور پرشدگی نامیده می‌شود، بنابراین داریم:

$$\frac{\mu(\omega)}{\mu_0} = 1 + f \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (۴.۵۳)$$

پذیرفتاری مغناطیسی هنگامی که شامل فرآیندهای افت انرژی شود، یک بخش موهومی ایجاد می‌کند. مقایسه  $\mu(\omega)$  با  $\epsilon(\omega)$ ، بیانگر آن است که پاسخ تشدید مجموعه‌ای از حلقه‌های شکافته به یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان بسیار شبیه پاسخ تشدید مجموعه‌ای از نوسانگرهای لورنتس به یک میدان الکتريکی وابسته زمان است. در عمل می‌توان  $\epsilon(\omega) < 0$



را در باند فرکانسی مشابه، همان گونه مهندسی کرد که با بلور حلقه‌های شکافته سیمی رفتار شد. نتیجه نهایی یک ساختار مصنوعی با  $n(\omega) < 0$  است.

#### ۴-۵. حل تمرینات

تمرین ۱: با استفاده از پاسخ دی‌الکتریک محیط به یک چگالی بار آزاد، معکوس تابع دی‌الکتریک  $\epsilon^{-1}$  (که یک پاسخ خطی علی است) را مورد بررسی قرار دهید.

حل: بار آزاد یک میدان الکتریکی  $\widehat{E}_f(r, \omega)e^{-i\omega t}$  تولید می‌کند:  $\widehat{E}_f(r, \omega) = \widehat{\rho}_f(r, \omega) \epsilon_0 \nabla$ . همچنین  $\widehat{D}(r, \omega)e^{-i\omega t}$  به صورت روبرو تعریف می‌شود:  $\nabla \cdot \widehat{D}(r, \omega) = \widehat{\rho}_f(r, \omega)$ . بنابراین داریم:

$$\nabla \cdot \widehat{E}(r, \omega) = \epsilon^{-1}(r, \omega) \nabla \cdot \widehat{E}_f(r, \omega)$$

تابع دی‌الکتریک معکوس مشخص می‌کند که چگونه یک سیستم بار نهایی را به بار آزاد آن، خلق می‌کند.

تمرین ۲: اگر همه کمیت‌ها متناسب با زمان  $e^{-i\omega t}$  باشند، رها سازی بار داخلی توسط یک محیط اهمی را توصیف کنید.

حل:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{j}(r, t) = -\frac{\partial \rho(r, t)}{\partial t} & \rightarrow \nabla \cdot \hat{\mathbf{j}}(r, \omega) = i\omega \hat{\rho}(r, \omega) & \text{تبدیل فوریه معادله پیوستگی} \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(r, t) = \rho(r, t) & \rightarrow \epsilon_0 \nabla \cdot \widehat{\mathbf{E}}(r, \omega) = \hat{\rho}(r, \omega) & \text{قانون گاوس} \end{cases}$$

$$\rightarrow [\hat{\sigma}(\omega) - i\epsilon_0\omega] \hat{\rho}(r, \omega) = 0$$

با قرار دادن ضریب رسانش درود (۴.۳۳) در معادله بالا، به یک معادله درجه دو می‌رسیم:

$$\omega^2 + i\frac{\omega}{c} - \omega_p^2 = 0 \rightarrow \omega_{\pm} = \frac{i}{2c} \pm \sqrt{\omega_p^2 - \frac{1}{4c^2}} \rightarrow \omega_{\pm} \approx \begin{cases} -\frac{i}{2\tau} \pm \omega_p & \omega_p \gg 1 \\ -\frac{i}{\tau}, -i\omega_p\tau & \omega_p \ll 1 \end{cases}$$

در  $\omega_p \gg 1$  دارای رسانندگی خوب هستیم و در  $\omega_p \ll 1$  دارای رسانندگی بد هستیم. در یک رسانای خوب با بار اولیه

$\rho(r, 0)$  به نوسان میرا  $\rho(r, t) = \exp(-t/2\tau) \cos \omega_p t$  دست می‌یابیم. پس رابطه  $\rho = \mathbf{e} \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  برای امواج

الکترومغناطیسی در فلزات اثبات شد. همچنین در یک رسانای بد، تغییرات زمانی  $\rho(r, t)$  مجموع دو پتانسیل میرا با

ثابت‌های زمانی متفاوت است. یکی از این دو پتانسیل میرا به پتانسیل خوب، نزدیک است و پتانسیل دیگر دارای رفتار

طولانی مدت  $\rho(r, t) = \rho(r, t) \exp(-\sigma_0 t / \epsilon_0)$  است.

## فصل پنجم : پتانسیل، میدان تاخیری و تابش ذرات باردار

### ۵-۱. پتانسیل

پتانسیل نرده‌ای برای یک توزیع بار با بار ساکن برابر است با :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (۵.۱)$$

پتانسیل برداری برای یک چگالی جریان پایا  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  برابر است با :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (۵.۲)$$

اگر بارها به طور آزاد حرکت کنند و میدان الکتریکی آنها با سرعت متناهی  $c$  منتشر شود، نمی‌توان با قرار دادن  $\rho(\mathbf{r}', t)$  در رابطه (۵.۱)، پتانسیل را محاسبه کرد. بلکه باید مکان بارها و میدان الکتریکی را در زمان‌های قبل  $(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$  محاسبه کرد. پس روابط (۵.۱) و (۵.۲) به صورت زیر تصحیح می‌شوند :

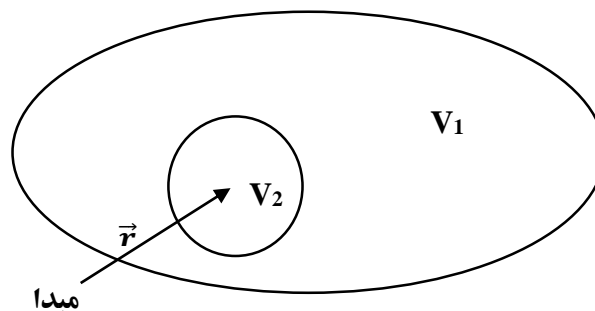
$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_v \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (۵.۳)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int_v \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \quad (۵.۴)$$

روابط (۵.۳) و (۵.۴) در زمان‌های تاخیر محاسبه می‌شوند و در محیط مادی (فضای خالی) قرار دارند. برای اثبات اینکه این پتانسیل‌ها حل معادله موج غیرهمگن هستند، داریم :

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \quad (۵.۵)$$

اثبات  $A$  نیز به روش مشابهی انجام می‌شود. در ادامه، حجم  $V$  به دو حجم تقسیم می‌شود  $(V = V_1 + V_2)$ . حجم  $V_1$  یک حجم کوچک است (که در حجم  $V_2$  قرار دارد) و یک نقطه که توسط بردار  $\mathbf{r}$  نشان داده شده است را فرا می‌گیرد که این نقطه، نقطه مشاهده نامیده می‌شود و پتانسیل در این نقطه محاسبه می‌شود (شکل ۵-۱).



شکل ۵-۱. حجم  $V$ .

پتانسیل به دو قسمت تقسیم می‌شود، یعنی:  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  و بنابراین انتگرال آن برابر است با:

$$\Phi_i(r, t) = \int_{V_i} \frac{\rho(r', t - \frac{R}{c})}{R} dv' \quad R = |r - r'| \quad (5.6)$$

برای حذف اثرات ناشی از تاخیر در تمام نقاط  $V_1$ ، باید حجم  $V_1$  را بسیار کوچک کرد و در داخل این حجم به نتیجه  $\rho(r', t) \rightarrow \rho(r', t - (R/c))$  می‌رسیم. همچنین انتگرال پتانسیل برای این حجم برابر می‌شود با:

$$\Phi_1(r, t) = \int_{V_1} \frac{\rho(r', t)}{R} dv' \quad (5.7)$$

به دلیل شباهت این پتانسیل با پتانسیل استاتیکی،  $\Phi_1$  همان حل معادله پواسون است:  $\nabla^2 \Phi_1(r, t) = -4\pi\rho(r, t)$ . با توجه به وجود یک المان بار در نقطه  $r'$ ، یک تقارن کروی بین تابع فاصله  $R$  و  $\rho(r', t - (R/c))$  وجود دارد. بنابراین داریم:

$$\nabla^2 \left( \frac{\rho}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\rho}{R} \right) \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} \quad (5.8)$$

$$\rightarrow \nabla^2 \Phi_2(r, t) = \int_{V_2} \nabla^2 \left\{ \frac{\rho(r', t - \frac{R}{c})}{R} \right\} dv' = \int_{V_2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} \left\{ \rho(r', t - \frac{R}{c}) \right\} dv' \quad (5.9)$$

اگر چگالی بار  $\rho = \rho(r', t - (R/c))$  یک حل معادله موج یک بعدی باشد به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0 \quad (5.10)$$

اگر در رابطه (۵.۱۰) را (۵.۹) قرار دهیم، داریم:

$$\nabla^2 \Phi_2(r, t) = \frac{1}{c^2} \int_{V_2} \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho(r', t - \frac{R}{c}) dv' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_2} \frac{\rho(r', t - \frac{R}{c})}{R} dv' \quad (5.11)$$

اگر  $V_1$  به سمت صفر میل کند آنگاه انتگرال رابطه (۵.۱۱) برابر با  $\Phi(r, t)$  خواهد بود:

$$\nabla^2 \Phi_2(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (5.12)$$

در نتیجه داریم:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_2) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 4\pi\rho \quad (5.13)$$

یعنی پتانسیل تاخیری یک حل برای معادله موج غیرهمگن است. اگر چگالی بار  $\rho(t - (R/c))$  یک حل معادله موج یک بعدی باشد پس  $\rho(t + (R/c))$  هم یک حل معادله موج است. بنابراین پتانسیل اسکالر برابر است با:

$$\Phi'(r, t) = \int_{V_2} \frac{\rho(r', t + \frac{R}{c})}{R} dv' \quad (5.14)$$

این پتانسیل یک معادله موج غیرهمگن است که اهمیت فیزیکی ندارد و قانون علیت را نقض می کند اما سهم توزیع بار را در آینده تفسیر می کند.

### ۵-۲. میدان های تاخیری

پتانسیل های تاخیری در میدان های مغناطیسی و الکتریکی بر حسب منابع تاخیری بیان می شوند. اگر میدان الکتریکی برابر با  $E = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$  باشد آنگاه برای حل گرادیان آن داریم:

$$\begin{aligned}\nabla\left(\frac{[\rho]}{R}\right) &= \left(\frac{1}{R}\right)\nabla[\rho] + [\rho]\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \left(\frac{1}{R}\right)\nabla[\rho(r', t_{ret})] - \left(\frac{[\rho]e_R}{R^2}\right) \rightarrow \\ \left(\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]\nabla\left(t - \frac{1}{c}|r - r'|\right) - \left(\frac{[\rho]e_R}{R^2}\right)\right) &= -\left(\frac{1}{c}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]e_R + \left(\frac{[\rho]e_R}{R^2}\right)\right) \quad (5.15)\end{aligned}$$

$e_R$  در اینجا یک بردار است بنابراین  $R = r - r'$  می باشد. با قرار دادن رابطه (۵.۱۵) در معادله میدان الکتریکی به قانون کلمب- فارادی می رسم:

$$E(r, t) = \int_V \left( \left( \frac{[\rho]e_R}{R^2} \right) + \frac{e_R}{cR} \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} \right] + \frac{1}{c^2 R} \left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right] \right) dv' \quad (5.16)$$

این رابطه در حالت استاتیکی به قانون کلمب تبدیل می شود یعنی جمله سوم در (۵.۱۶) که بیانگر میدان الکتریکی فارادی است، حذف خواهد شد. همچنین اگر میدان مغناطیسی برابر با  $B = \nabla \times A$  باشد آنگاه برای حل گرادیان آن داریم:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left( \frac{[J]}{R} \right) &= \left( \frac{1}{R} \right) \nabla \times [J] - [J] \times \nabla \left( \frac{1}{R} \right) \rightarrow \\ \nabla \times ([J]) &= - \left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right] \times \nabla \left( t - \frac{1}{c}|r - r'| \right) = \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right] \times e_R \quad (5.17)\end{aligned}$$

با قرار دادن رابطه (۵.۱۷) در معادله میدان مغناطیسی به قانون بیوساوار می رسم:

$$B(r, t) = \int_V \left( \left( \frac{[J] \times e_R}{cR^2} \right) + \frac{\left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right] \times e_R}{c^2 R} \right) dv' \quad (5.18)$$

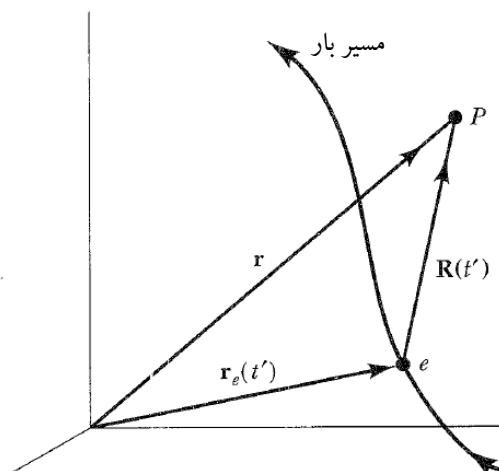
چگالی جریان در زمان  $t$  با استفاده از سری تیلور به صورت مشتق زمان های تاخیری  $t_{ret} = t - (R/c)$  بیان می شود:

$$J(r, t) = J(r, t_{ret}) + \left[ \frac{\partial J}{\partial t} \right]_{t_{ret}} \left( \frac{R}{c} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} \right]_{t_{ret}} \left( \frac{R}{c} \right)^2 + \dots \quad (5.19)$$

### ۵-۳. پتانسیل های Lienard - Wiechert

برای میدان های ناشی از بارهای متحرک نقطه ای باید معادلات میدان و پتانسیل به صورت میکروسکوپی بیان شود. یک بار نقطه ای حامل بار  $e$  که با بردار شعاعی  $\Gamma_e(t')$  در امتداد مسیر قرار دارد (شکل ۵-۲) و برای یک تک بار، مکان یک تابع دلتا در زمان می باشد و پتانسیل تاخیری به صورت انتگرال روی زمان نوشته می شود:

$$\Phi(r, t) = e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t' - t + \frac{|r - r_e|}{c})}{|r - r'|} dt' \quad (5.20)$$



شکل ۲-۵. هندسه یک بار نقطه‌ای متحرک

با ایجاد یک تغییر متغیر وانته‌گرا ل گیری شبیه به آرگومان تابع دلتا، یک متغیر جدید بنام  $t''$  ایجاد می‌شود:

$$t'' \equiv (t' - t + \frac{|r - r_e(t')|}{c}) \quad (5.21)$$

با دیفرانسیل گیری از رابطه (۵.۲۱) و ثابت در نظر گرفتن  $dt = 0$ ، داریم:

$$dt'' \equiv dt' (1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |r - r_e(t')|) \quad (|r - r_e(t')| = \sqrt{\sum_i (x_i - x_{e,i})^2}) \quad (5.22)$$

در اینجا  $x_i$  ثابت است و به عنوان نقطه مشاهده، توصیف می‌شود و  $x_{e,i} = x_{e,i}(t')$  می‌باشد. با مشتق گیری از رابطه (۵.۲۲) نسبت به  $t'$  داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |r - r_e(t')| &= \frac{1}{c} \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial x_{e,i}} |r - r_e| \right) \frac{dx_{e,i}}{dt'} = \frac{1}{c} \sum_i (\nabla_{r_e} |r - r_e|) \frac{dx_{e,i}}{dt'} \\ &= \frac{1}{c} \sum_i \left( \frac{r - r_e}{|r - r_e|} \right) \frac{dx_{e,i}}{dt'} \end{aligned} \quad (5.23)$$

همچنین سرعت ذره  $u$  برابر است با مشتق  $r_e$  نسبت به  $t'$ . بنابراین با استفاده از رابطه  $\beta = u/c$ ، داریم:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |r - r_e| = \frac{\beta \cdot R}{R} \quad (5.24)$$

بنابراین داریم:

$$dt'' \equiv dt' \left( 1 + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} |r - r_e| \right) = dt' \left( 1 - \frac{\beta \cdot R}{R} \right) \rightarrow dt' = \frac{R}{R - \beta \cdot R} dt'' \quad (5.25)$$

رابطه (۵.۲۵) را در  $Q(r, t)$  قرار می‌دهیم:

$$Q(r, t) \equiv e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t'')}{R(t')} \left( \frac{R(t')}{R(t') - \beta(t').R(t')} \right) dt'' \quad (5.26)$$

با استفاده از خاصیت تابع دلتا به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$Q(r, t) \equiv \frac{e}{R(t') - \beta(t').R(t')} \Big|_{t''=0} \quad (5.27)$$

اگر  $t'' = 0$  باشد، زمان تاخیری برابر با  $t' = t - R(t')/c$  خواهد بود، بنابراین داریم:

$$Q(r, t) \equiv \frac{e}{[R - \beta.R]} \quad (5.28)$$

با توجه به اینکه چگالی بار در سرعت برابر با چگالی جریان خواهد بود، می توان به محاسبات مشابهی برای  $A$  دست یافت و به این نکته رسید که پتانسیل برداری  $u/c$  یا  $\beta$ ، برابر با پتانسیل نرده ای خواهد بود:

$$A(r, t) \equiv \frac{e[\beta]}{[R - \beta.R]} \quad (5.29)$$

#### ۵-۴. میدان های Lienard - Wiechert

میدان های Lienard - Wiechert به طور مستقیم توسط پتانسیل های Lienard - Wiechert بدست خواهند آمد اما به دلیل پیچیدگی هایی که وابستگی به زمان تاخیری ایجاد می کند بهتر است که از میدان های تاخیری برای محاسبه میدان ذره باردار متحرک استفاده کرد. یعنی باید از عبارات زیر برای کوتاه کردن معادلات استفاده کرد:

$$\begin{cases} n \equiv e_R \equiv \frac{R}{R} \\ \beta \equiv e_R \equiv \frac{R}{R} \\ K \equiv 1 - \frac{\beta.R}{R} \equiv 1 - \beta.n \end{cases} \quad (5.30)$$

همچنین قانون کلمب- فارادی تعمیم یافته (۵.۱۶) به رابطه زیر تبدیل خواهد شد:

$$E(r, t) = e \left( \left( \frac{n}{KR^2} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{n}{KR} \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\beta}{KR} \right] \right) \quad (5.31)$$

قانون بیوساوار تعمیم یافته (۵.۱۸) هم به رابطه زیر تبدیل خواهد شد:

$$B(r, t) = e \left( \left( \frac{\beta \times n}{KR^2} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\beta \times n}{KR} \right) \quad (5.32)$$

با استفاده از  $t_r$  به عنوان زمان تاخیری، می توان مشتق های زمانی بار متحرک را بدست آورد:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (r - r_e(t_r)) = -\frac{\partial r_e(t_r)}{\partial t} = -u \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial R}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (c(t - t_r)) = c \left( 1 - \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{R.R} = n \cdot \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right) = -(n \cdot u) \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \end{cases} \end{cases} \quad (5.33)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{R}{R} \right) = \frac{1}{R} (n(n \cdot u) - u) \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{du(t_r)}{dt_r} \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial(KR)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (R - \beta \cdot R) = \frac{1}{c} (-cn \cdot u + u \cdot u - r \cdot a) \left( \frac{\partial t_r}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - n \cdot \beta} = \frac{1}{K} \end{cases} \quad (۵.۳۴)$$

با استفاده از مشتق‌های (۵.۳۳) و (۵.۳۴) به روابط زیر برای میدان‌های Lienard - Wiechert، خواهیم رسید:

$$\begin{cases} E(r, t) = e \left[ \frac{(n-\beta)(1-\beta^2)}{K^3 R^2} + \frac{n \times ((n-\beta) \times a)}{c^2 K^3 R^2} \right] \\ B(r, t) = e \left[ \frac{\beta \times n(1-\beta^2)}{K^3 R^2} + \frac{(a \cdot n)(\beta \times n)}{c^2 K^3 R^2} + \frac{a \times n}{c^2 K^3 R} \right] \end{cases} \rightarrow B = [n] \times E \quad (۵.۳۵)$$

یعنی میدان مغناطیسی یک بار نقطه‌ای بر بردار  $n$  و میدان الکتریکی عمود خواهد بود. میدان الکتریکی توسط دو جمله تجزیه می‌شود (جمله اول شامل سرعت ذره است و متناسب با معکوس مربع فاصله است  $(1/R^2)$ ، جمله دوم شامل شتاب ذره است و متناسب با معکوس فاصله است  $(1/R)$ ). البته بردار پویین تینگ در بخش‌های مختلف میدان به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} S_{vv} \propto \frac{1}{[R^4]} \\ S_{va}, S_{av} \propto \frac{1}{[R^3]} \\ S_{aa} \propto \frac{1}{[R^2]} \end{cases} \quad (۵.۳۶)$$

اگر بار متحرک در یک کره با شعاع  $R$  قرار گیرد و توسط شارش پویین تینگ روی سطح کره انتگرال‌گیری شود، آنگاه مقدار شارش در فواصل خیلی زیاد برای  $S_{aa}$ ، غیر صفر خواهد بود. پس انرژی میدان سرعت، چسبیده به بار خواهد ماند اما میدان‌های شتاب از بار جدا می‌شوند و در تابش شرکت خواهند کرد. این موضوع که که بارهای شتاب‌دار، تابش خواهند کرد اما بارهایی با سرعت یکنواخت، تابش نخواهند کرد با طبیعت نسبیته میدان، سازگار خواهد بود. با توجه به سرعت نسبیته بین ذره و مشاهده‌گر ( $u$ )، یک مرجع وجود دارد که ذره در آن ساکن است و مشاهده‌گر با سرعت یکنواخت حرکت می‌کند. همچنین یک بار با استاتیک نمی‌تواند، انرژی تابش کند، زیرا تابش هم برای شتاب مثبت و هم منفی، اتفاق می‌افتد. در شتاب کاهنده نیز تابش داریم، بنابراین اگر یک باریکه از الکترون به یک سد هادی برخورد کند و در آن متوقف شود، آنگاه یک تابش  $X$  بدست خواهد آمد.

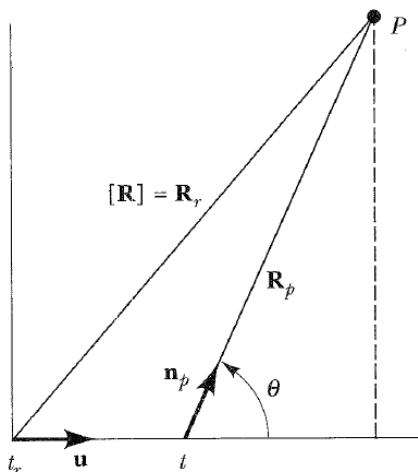
## ۵-۵. میدان تولید شده توسط یک ذره باردار با حرکت یکنواخت

برای یک ذره با سرعت ثابت  $u$  به  $a = 0$  می‌رسیم و همچنین تاخیر هیچ تاثیری در  $\beta = u/c$  ندارد. بنابراین میدان الکتریکی با جمله وابسته به سرعت بیان می‌شود:

$$E(r, t) = \left[ \frac{e}{K^3 R^2} (R - \beta \cdot R)(1 - \beta^2) \right] \quad (۵.۳۷)$$

مطابق شکل ۳-۵، می‌توان میدان را بر حسب محل فعلی ذره ( $R_p$ ) نوشت و از مکان تاخیری صرف نظر کرد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} R_r = R_p + (t - t_r)u & \text{رابطه برداری} \\ R_r = (t - t_r)c & \text{تاخیر زمانی} \end{cases} \rightarrow R_p = R_r - R_r\beta \quad (5.38)$$



شکل ۳-۵. مکان فعلی و مکان تاخیری ذره.

رابطه (۵.۳۸) با رابطه داخلی کروشه (۵.۳۷)، برابر است. در ادامه داریم:

$$[K^2 R^2] = (R_r - R_r\beta)^2 = R_r^2 - 2R_r R_r\beta + (R_r\beta)^2 \quad (5.39)$$

با استفاده از قضیه فیثاغورت برای دو مثلث با وتر  $R$  داریم:

$$R_r^2\beta^2 - (R_r - \beta)^2 = R_p^2\beta^2 - (R_p\beta)^2 \quad (5.40)$$

با قرار دادن رابطه (۵.۴۰) در مربع رابطه (۵.۳۸)، می‌توان به ویرایش جدیدی از رابطه (۵.۳۹) رسید:

$$\begin{aligned} [K^2 R^2] &= R_p^2 - R_p^2\beta^2 + (R_p\beta)^2 = R_p^2 - R_p^2\beta^2 + (R_p\beta \cos\theta_p)^2 \\ &= R_p^2(1 - \beta^2 \sin^2\theta) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$\theta$  زاویه بین سرعت و بردار شعاعی زمان کنونی است. بنابراین میدان الکتریکی بار با سرعت یکنواخت به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$E = \left[ \frac{e(1-\beta^2)}{R_p^2(1-\beta^2 \sin^2\theta)^{3/2}} n_p \right] \quad (5.42)$$

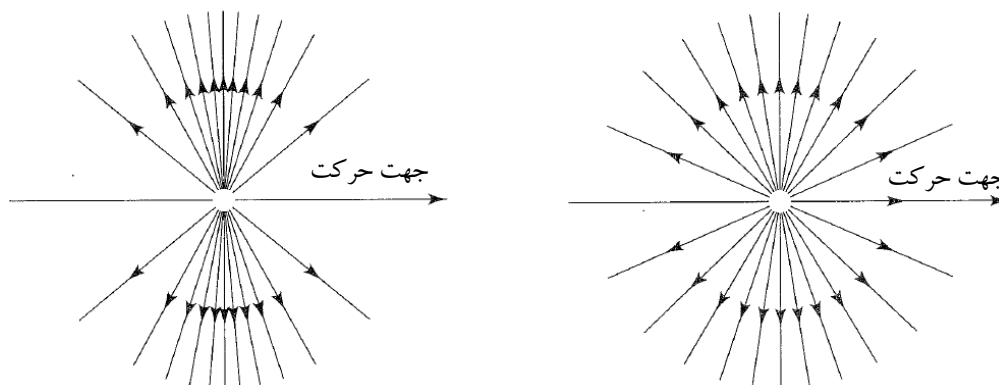
$n_p$  یک بردار یکه از مکان فعلی بار تا نقطه مشاهده و فاصله فعلی  $R_p$  است. میدان مغناطیسی با استفاده از رابطه (۵.۴۳) بدست خواهد آمد:



$$[n] = \frac{R_r}{R_r} = \frac{R_p}{R_r} + \beta = \frac{R_p}{R_r} n_p + \beta \quad (5.43)$$

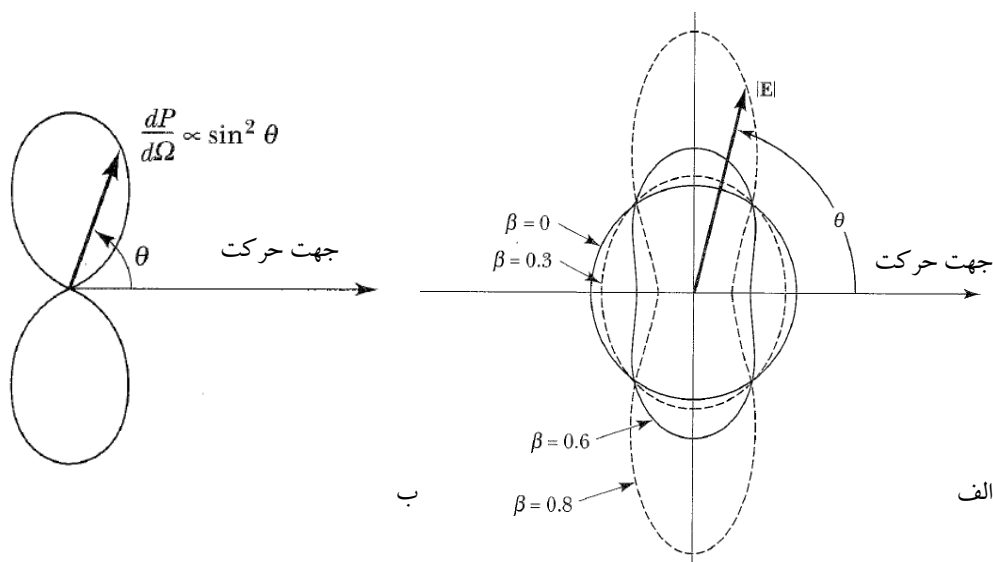
$$B = \beta \times E = \frac{e(1-\beta^2)}{R_p^2(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} + \beta \times n_p \quad (5.44)$$

بنابراین میدان‌ها در یک بار متحرک (با سرعت یکنواخت) به مکان فعلی خود وابسته اند. میدان الکتریکی به صورت شعاعی است و خطوط میدان، صاف و تابش کننده از بار هستند (شکل ۵-۴).



شکل ۵-۴. میدان الکتریکی برای بار متحرک (با سرعت یکنواخت).

وابستگی به زاویه  $\theta_p$  در سرعت‌های بالا باعث افزایش بزرگی میدان در جهت عمود بر حرکت و کاهش بزرگی میدان در سمت جلو یا عقب خواهد شد (شکل ۵-۵ الف).



شکل ۵-۵. الف. نمودار قطبی بزرگی میدان الکتریکی. ب. وابستگی زاویه‌ای تابشی یک بار با شتاب آهسته.

بردار پوینتینگ در مجاورت بار بیانگر آن است که شار انرژی میدان الکترومغناطیسی چسبیده به بار است و همراه بار هدایت خواهد شد. یعنی تابش وجود ندارد.

۵-۶. تابش از یک ذره باردار شتاب‌دار در سرعت‌های پایین

اگر سرعت ذره به اندازه‌ای کوچک باشد که در مقابل  $c$  از آن صرف نظر شود ( $K \rightarrow 1$  و  $\beta \ll 1$ )، آنگاه میدان‌های شتاب برابر خواهد بود با:

$$\begin{cases} E_a = \frac{e}{c^3 R^3} \{R \times (R \times a)\} = \frac{e}{c^3 R^3} \{(R \cdot a)R - R^2 a\} \\ B_a = \frac{R \times E_a}{R} = n \times E_a \end{cases} \quad (5.45)$$

$$E_a \times B_a = \frac{E_a \times (R \times E_a)}{R} = \frac{1}{R} \{E_a^2 R - (E_a \cdot a)E_a\} = \frac{1}{R} \{E_a^2 R - 0\} = E_a^2 \quad (5.46)$$

بنابراین بخشی از بردار پویین تینگ که در تابش شرکت خواهد کرد برابر است با:

$$\{S_a = \frac{c}{4\pi} (E_a \times B_a) = \frac{c}{4\pi} E_a^2 \quad (5.47)$$

همچنین داریم:

$$E_a^2 = \frac{e^2}{c^4 R^2} \{R^2 a^2 - (R \cdot a)^2\} = \frac{e^2}{c^4 R^2} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{e^2}{c^4 R^2} \sin^2 \theta \quad (5.48)$$

در نتیجه بردار پویین تینگ برابر خواهد بود با:

$$\{S_a = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 R^2} \sin^2 \theta \quad (5.49)$$

چون بردار پویین تینگ بیانگر انرژی در واحد سطح در واحد زمان است، می‌توان توزیع زاویه‌ای تابش را به عنوان توان تابش شده در واحد زاویه فضایی بیان کرد (شکل ۵-۵ ب):

$$\frac{dP}{d\Omega} = (S_a \cdot n) R^2 = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (5.50)$$

توان تابش شده کل با انتگرال‌گیری روی کل کره بدست می‌آید:

$$P = \int_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (\sin^2 \theta) \cdot \sin \theta d\theta = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} = \quad (5.51)$$

روابط (۵.۵۰) و (۵.۵۱)، فرمول‌های لارمور (برای توان تابشی ذرات باردار شتاب‌دار غیرنسبیتی) نامیده می‌شوند.

## ۵-۷. تابش از یک ذره باردار با سرعت و شتاب هم‌راستا

با استفاده از میدان‌های تابشی در هنگام موازی بودن شتاب و سرعت، داریم:

$$E_a^2 = \frac{e}{c^4 K^2 R^3} R \times (R \times a) = \frac{e}{c^4 K^2 R^3} \{1(R \cdot a)R - R^2 a\} \quad (5.52)$$

تفاوت این حالت با حالت سرعت پایین در محدود نبودن  $\beta = u/c$  است. اکنون برای یافتن عبارت کمی از تابش تولید شده باید از تابش مشاهده شده در زمان  $t$  (توسط ذره باردار) که در زمان تاخیری  $t' = t - R/c$  گسیل شده است، استفاده کرد:

$$\begin{cases} E_a^2 = \frac{e^2}{c^4 K^6 R^4} \{R^2 a^2 - (R \cdot a)^2\} = \frac{e^2}{c^4 K^6 R^4} \sin^2 \theta \\ S_a = \frac{c}{4\pi} E_a^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3 K^6 R^2} \sin^2 \theta \end{cases} \quad (5.53)$$

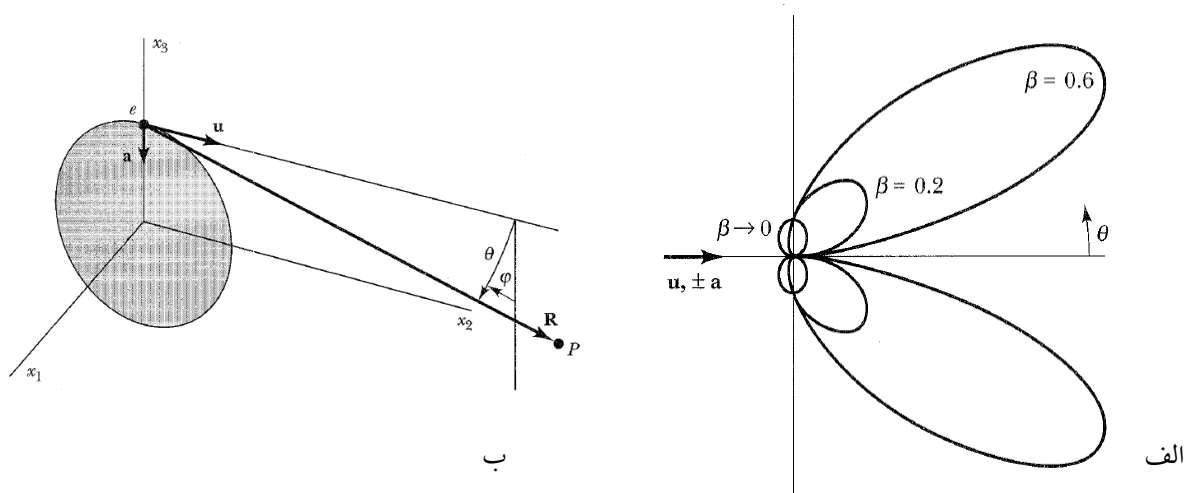
انرژی هدر رفته توسط ذره، در واحد زاویه فضایی در A تابش می شود و در بازه زمانی dt اندازه گیری می شود:

$$-dW(\theta) = (S_a \cdot n) = R^2 dt \quad (5.54)$$

$S_a \cdot n$  مولفه دوم خارج بردار پوینتینگ است که در زمان t اندازه گیری می شود و مطابق تابش گسیل شده از ذره در زمان  $t'$  است. توان تابش شده در واحد زاویه فضایی که در زمان t و با فاصله R از یک سطح عبور می کند برابر با انرژی در واحد زمان هدر رفته توسط ذره زمان  $t'$  می باشد:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= -\frac{dW(\theta)}{dt'} = (S_a \cdot n) R^2 \frac{dt}{dt'} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 K^6} \sin^2 \theta \frac{dt}{dt'} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 K^6} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\beta \cdot R}{R}\right) = \\ &= \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 K^6} \sin^2 \theta (K) = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 K^6} \sin^2 \theta (1 - \beta \cos \theta) = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^5} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (5.55)$$

مطابق شکل ۵-۶ الف،  $\theta$  زاویه بین سرعت u و بردار شعاعی R است و هنگامی که  $\beta \gg 1$  باشد به فرمول لارمور بدست خواهد آمد.



شکل ۵-۶. الف. تابش بار شتابدار. ب. مختصات تابش یک ذره در مدار دایروی.

هنگامی که  $\beta \rightarrow 1$  باشد، شدت تابش در جهت روبرو و توان کل تابش شده (که در همه جهت ها یک تابع است) افزایش می یابد:

$$P = \int_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^3} \quad (5.56)$$

تابش برای ذرات نسبیتی در یک مخروط رو به جلو، کج خواهد شد اما در حالت  $\theta = 0$ ، هیچ تابشی تولید نخواهد شد. مثلاً اگر الکترون ها توسط یک شتاب دهنده، شتاب دار شوند آنگاه منطقه باریک بدون تابش، در مسیر پرتو قرار خواهد

گرفت. یعنی اگر یک پرتو الکترون توسط یک سد مادی متوقف شود آنگاه پراکندگی باعث تغییر جهت اولیه حرکت خواهد شد. این پراکندگی در الکترون‌های سریع برای خراب کردن توزیع تابش به کار می‌رود و یک لوب با تابش تکی در جهت رو به جلو، تولید خواهد کرد.

### ۵-۸. تابش از یک ذره باردار محصور شده در حلقه چرخان

بردار شتاب  $a$  برای یک ذره در یک مدار دایروی به سمت مرکز مدار، جهت گیری خواهد کرد بنابراین بر سرعت  $u$  عمود خواهد بود. عمود بودن  $a$  و  $u$  بر هم باعث حذف تقارن حول جهت حرکت خواهد شد. مطابق شکل ۵-۶، باید یک زاویه سمتی  $\varphi$  تعریف شود تا مدار در صفحه  $x_2 - x_3$  قرار گیرد:

$$\begin{cases} n \cdot \beta = n\beta \cos\theta & \text{یا} & u \cdot R = uR \cos\theta \\ n \cdot a = a \sin\theta \cos\varphi & \text{یا} & u \cdot a = aR \sin\theta \cos\varphi \end{cases} \quad (5.57)$$

بنابراین داریم:

$$E_a = \frac{e}{c^2 K^3 R} n \times (b \times a) \quad (b = n - \beta) \quad (5.58)$$

برای یافتن تابش باید  $E_a^2$  را بدست آورد:

$$\begin{cases} \{n \times (b \times a)\}^2 = \{(n \cdot a)b - (n \cdot b)a\}^2 = (n \cdot a)^2 b^2 - 2(n \cdot a)(n \cdot b)(a \cdot b) + (n \cdot b)^2 a^2 \\ b^2 = (n - \beta) \cdot (n - \beta) = n \cdot n - 2n \cdot \beta + \beta^2 = 1 - 2\beta \cos\theta + \beta^2 \\ n \cdot b = n \cdot (n - \beta) = n \cdot n - n \cdot \beta = 1 - \beta \cos\theta \\ a \cdot b = a \cdot (n - \beta) = a \cdot n - a \cdot \beta \rightarrow a \cdot n = a \sin\theta \cos\varphi \end{cases} \quad (5.59)$$

با استفاده از روابط (۵.۵۹) می‌توان به  $E_a^2$  رسید:

$$\begin{aligned} E_a^2 &= \frac{e^2}{c^4 K^6 R^2} \{n \times (b \times a)\}^2 = \frac{e^2}{c^4 K^6 R^2} (a \sin\theta \cos\varphi)^2 (1 - 2\beta \cos\theta + \beta^2)^2 - \\ &2(a \sin\theta \cos\varphi)^2 (1 - \beta \cos\theta) + a^2 (1 - \beta \cos\theta)^2 = \\ &\frac{e^2 a^2}{c^4 K^6 R^2} \{(1 - \beta \cos\theta)^2 - (1 - \beta)^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi\} \quad (K = 1 - \beta) \quad (5.60) \end{aligned}$$

توزیع زاویه‌ای انرژی تابشی که یک رابطه سه بعدی است، برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{dW(\theta)}{dt'} = (S_a \cdot n) R^2 \frac{dt}{dt'} = \frac{c}{4\pi} E_a^2 R^2 (1 - \beta \cos\theta) = \\ &\frac{e^2 a^2}{4\pi c^2} \frac{(1 - \beta \cos\theta)^2 - (1 - \beta)^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{(1 - \beta \cos\theta)^5} \quad (5.61) \end{aligned}$$

همچنین توان کل تابش توسط یک ذره با بار  $e$ ، برابر است با:

$$P = \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \quad (5.62)$$

## فصل ششم : آنتن‌ها

### ۱-۶. تابش ایجاد شده توسط ممان‌های دو قطبی

با توجه به اینکه که میدان الکتروستاتیکی یک مجموعه بار توسط بسط چند قطبی (که شامل تک قطبی، دو قطبی، چهار قطبی و ... است) توصیف می‌شود، می‌توان یک بسط مشابه برای مگنو استاتیک یک مدار جریان ثابت با حرکت رندوم بارها و وابستگی زمانی دلخواه جریان‌ها، بیان کرد. این بسط در دو حالت حدی موثر است. در حالت اول، بارها کند تغییر هستند و فرمول‌های استاتیک صرف نظر از تاخیر و تابش معقول، یک تقریب خوب برای میدان‌ها بیان می‌کنند. اکنون می‌توان توزیع منبع را در جمله‌هایی از ممان‌هایشان توصیف کرد اما ممان‌ها به زمان وابسته‌اند. میدان الکتریکی با حداقل سرعت  $1/r^2$  (تک قطبی) افت می‌کند و میدان مغناطیسی با حداقل سرعت  $1/r^3$  (ممان دو قطبی) افت می‌کند. اثر متقابل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی یک بردار پوینتینگ تولید می‌کند که انرژی الکترومغناطیسی را در مجاورت منبع به اطراف سوق می‌دهد و انرژی بسیار کمی را به فواصل بزرگ منتقل می‌کند. یعنی وقتی شتاب بارها و تغییرات جریان بزرگ باشند، آنگاه تابش بزرگی تولید می‌شود و میدان‌های نزدیک، متصل به منابع می‌مانند. در حالت دوم، هر دو میدان مغناطیسی و الکتریکی با فاصله سرعت  $1/r$  افت می‌کنند و یک بردار پوینتینگ تولید می‌کنند که انرژی را به صورت موج الکترومغناطیسی حمل می‌کنند که از منبع جدا می‌شوند. اگر توزیع بار، ماکروسکوپی (با چگالی  $\rho$  و چگالی جریان  $J$ ) باشد، آنگاه می‌توان برای محاسبه میدان‌ها از پتانسیل تاخیری استفاده کرد یا به طور مستقیم از میدان‌های تعمیم یافته استفاده کرد. همچنین اگر توزیع بار، میکروسکوپی باشد، می‌توان از پتانسیل Lienard – Wiechert برای محاسبه میدان‌ها استفاده کرد. در محاسبه معادلات این پتانسیل‌ها و میدان‌ها، جملات تابشی متناسب با  $1/r$  و نرخ تغییر جریان  $\partial t/\partial j$  یا شتاب  $a$  ذره باردار هستند. مثلاً پتانسیل برداری تاخیری برابر است با :

$$A(r, t) = \frac{1}{c} \int_V \frac{I(r', tr)}{R} dv' \quad (۶.۱)$$

با استفاده از (۵.۶۳) می‌توان میدان  $B = \nabla \times A$  را محاسبه کرد. اگر کرل نسبت به  $r$  باشد، می‌توان آن را وارد انتگرال کرد تا اثر مستقیم آن بر روی  $R = |r - r'|$  و تاثیر غیرمستقیم آن را بر روی  $J$  دید. میدان مغناطیسی تابشی با حذف جمله غیرتابشی (متناسب با  $J/R^2$ )، برابر است با :

$$B_{red} = -\frac{1}{c} n \times \frac{\partial A}{\partial t} \quad (n: \text{بردار یکه در جهت تابش}) \quad (۶.۲)$$

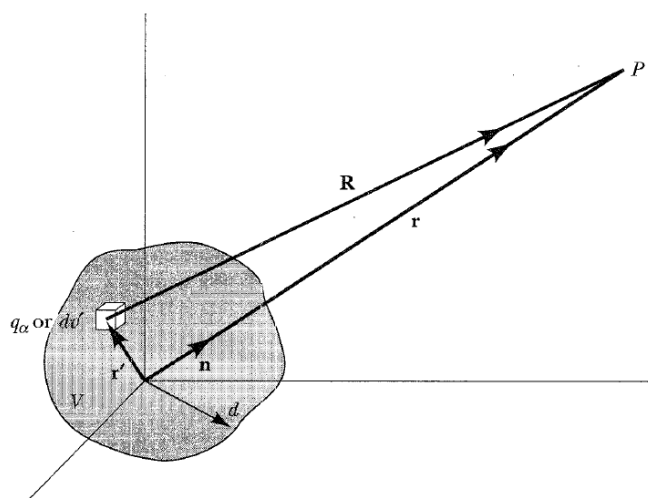
اگر توزیع منبع آنقدر متمرکز باشد که بتوان آن را از انتگرال خارج کرد و توزیع میدان الکتریکی تابشی را به صورت زیر بیان کرد :

$$E_{red} = B_{red} \times n = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} - \left( n \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \right) n \right\} \quad (۶.۳)$$

بنابراین بردار پویین تینگ تابشی برابر است با :

$$S_{red} = \frac{c}{4\pi} E_{red} \times B_{red} = \frac{c}{4\pi} (B_{red} \times n) \times B_{red} = \frac{c}{4\pi} (B_{red})^2 n = \frac{1}{4\pi c} \left| n \times \frac{\partial A}{\partial x} \right|^2 n \quad (۶.۴)$$

برای استفاده از توزیع منبع متمرکز در بسط چند قطبی تابش، مطابق شکل ۱-۶ اگر توزیع دارای اندازه مشخص  $d$  باشد آنگاه برای همگرایی سریع بسط چند قطبی باید نقطه میدان  $P$  در یک فاصله بزرگ باشد ( $r \gg d$ ). در استاتیک، ممان‌های چند قطبی غیر صفر مراتب پایین در میدان قرار دارند و میدان‌ها وابسته به زمان خواهند بود. پس باید یک محدودیت دیگر اعمال کرد، یعنی باید یک فاصله زمانی  $T$  برای هر تغییر قابل اعمال در توزیع بار ایجاد شود.



شکل ۱-۶. مختصات میدان و منبع.

سیستم یک فرکانس  $\nu$  وابسته به حرکت (از مرتبه  $1/T$ ) با طول موج  $\lambda \sim cT$  تطابق دارد. چگونه می‌توان از زمان مورد نیاز برای انتشار اثرهای الکترومغناطیسی داخل سیستم (از مرتبه  $d/c$ ) صرف نظر کرد؟ یعنی  $T \sim \lambda/c$  و  $d/c \ll T$  و  $d \ll \lambda$  می‌باشد و سیستم ابعاد کوچک‌تری از طول موج تابش دارد. بنابراین با اینکه می‌توان تاخیر در توزیع منبع را نادیده گرفت اما زمان  $T$  مورد نیاز برای تغییر در توزیع بار از مرتبه  $d/u$  است و  $d \ll \lambda$  معادل با حد غیر نسبی  $c \ll u$  سرعت ذرات است. شرط بعدی بیانگر اثرات الکترومغناطیسی (مشاهده شده در نقطه  $P$ ) به عنوان تابش است و فاصله  $r$  تا نقطه میدان را بزرگ‌تر از طول موج نشان می‌دهد ( $r \gg \lambda$ ). بنابراین برای تابش به رابطه کلی  $r \gg \lambda \gg d$  و برای حد استاتیک غیر تابشی به رابطه  $d \ll r \ll \lambda$  می‌رسیم.

## ۶-۲. تابش دو قطبی الکتریکی

میدان الکتریکی وابسته به شتاب برای بار  $\alpha$  ام برابر است با :

$$(S_{\alpha})_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}}{c^2} \left[ \frac{S_{\alpha} \times (R_{\alpha} \times a_{\alpha})}{R_{\alpha}^3} \right] \quad (۶.۵)$$

$R_\alpha$  یک بردار از مکان یار تا نقطه  $P$  است و کسر موجود در رابطه (۶.۵) بیانگر وجود زمان تاخیری است. با بر هم نهی کردن میدان‌های برداری انفرادی و محاسبه بردار پویین‌تینگ، می‌توان تابش کلی یک مجموعه از بارهای متحرک را توصیف کرد. اگر  $R_\alpha$  با استفاده از  $r \ll \lambda \ll d$  به صورت یک بردار شعاعی  $r$  در میدان تقریب زده شود و از تاخیر (بجز برای  $a_\alpha$ ) صرف نظر شود، آنگاه میدان الکتریکی تاخیر برابر خواهد بود با:

$$E_{red} = \sum_\alpha (E_\alpha)_\alpha = \frac{1}{c^2 r} n \times (n \times [\sum_\alpha q_\alpha a_\alpha]) \quad (6.6)$$

همچنین ممان دو قطبی توزیع بار و مشتق دوم زمانی آن برابر است با:

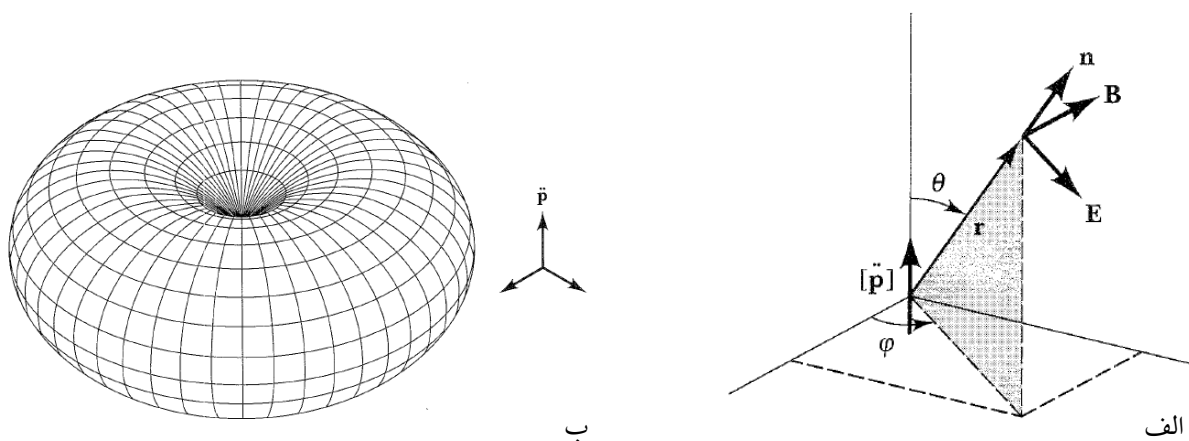
$$\begin{cases} P = \sum_\alpha q_\alpha r'_\alpha \\ \ddot{P} = \frac{d^2 P}{dt^2} = \sum_\alpha q_\alpha a_\alpha \end{cases} \quad (6.7)$$

بنابراین میدان الکتریکی تابشی و میدان مغناطیسی برابر است با:

$$\begin{cases} E_{red} = \frac{1}{c^2 r} n \times (n \times [\ddot{P}]) \\ B_{red} = n \times E_{red} = \frac{1}{c^2 r} n \times [\ddot{P}] \end{cases} \quad (6.8)$$

مطابق شکل ۶-۱ الف، اگر بردار  $\ddot{P}$  در راستای محور قطبی سیستم کروی جهت‌گیری کند آنگاه در یک نقطه در فضا در فاصله  $r$  و در جهتی که توسط زوایای  $\theta$  و  $\varphi$  مشخص خواهد شد، دیده می‌شود ( $E$  در جهت بردار  $e_\theta$  و  $B$  در جهت  $e_\varphi$ ):

$$\begin{cases} E_{red} = \frac{[\ddot{P}]}{c^2 r} \sin\theta e_\theta \\ B_{red} = \frac{[\ddot{P}]}{c^2 r} \sin\theta e_\varphi \end{cases} \quad (6.9)$$



شکل ۶-۱. الف. میدان تابشی دو قطبی. ب. طرح تابش یک دو قطبی الکتریکی وابسته به زمان

همچنین توان تابشی در واحد زاویه فضایی توسط دو قطبی الکتریکی وابسته به زمان، برابر است با (شکل ۶-۱ ب):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2[a^2]}{4\pi c^3} \sin^2\theta = \frac{[\ddot{p}^2]}{4\pi c^3} \sin^2\theta \quad (6.10)$$

سرانجام توان تابشی کل بدست می آید:

$$P = \frac{2e^2[a^2]}{3c^3} = \frac{2[\ddot{p}^2]}{3c^3} \quad (6.11)$$

بنابراین معادلات لامور برای تابش توسط ذرات غیرنسبیتی، تابش توسط توزیع متمرکز بارهای متحرک (که مشتق دوم زمانی ممان دوقطبی الکتریکی دارند) نیز به کار می روند. معمولاً ممان دوقطبی با زمان با فرکانس زاویه ای ثابت  $\omega$  نوسان خواهد کرد:

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t} \quad (6.12)$$

همچنین باید توان متوسط گیری شده بر روی یک دوره نوسان را بدست آورد:

$$\langle \ddot{p}^2 \rangle = p_0^2 \omega^4 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} p_0^2 \omega^4 \quad (6.13)$$

یعنی معادلات لامور در توزیع زاویه ای متوسط زمانی مورد استفاده قرار می گیرد و توان کل تابشی توسط دوقطبی الکتریکی، نوسان خواهد کرد:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2\theta = \frac{2\pi^3 c p_0^2}{\lambda^4} \sin^2\theta \quad (6.14)$$

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{16\pi^4 c p_0^2}{3\lambda^4} \quad (6.15)$$

دوقطبی نوسانی در اطراف کمرش یا خط استوا (عمود بر محور) تابش می کند و در جهت موازی با محورش، تابش ندارد و همچنین دوقطبی نوسانی با قدرت ثابت، در فرکانس های بالاتر، تابش بیشتری دارد.

### ۳-۶. میدان های دو قطبی الکتریکی وابسته به زمان

برای حذف تقریب تابش  $\lambda \gg r$  و گذار بین این حد و حد مقابل میدان های نزدیک یا شبیه استاتیکی  $\lambda \ll r$ ، می توان از مدل دوقطبی نوسانی هرترزی استفاده کرد (شکل ۲-۶ الف). فرض می کنیم که دو قطبی  $l \rightarrow d$  در مقایسه با  $r$  یا  $\lambda$ ، کوچک است. بنابراین مولد، بارهای یکسان و مخالف را به سمت جلو، عقب و داخل دو کره رسانا، پمپ می کند. اگر بار کره بالایی برابر با  $q(t)$  باشد و بار کره بالایی برابر با  $-q(t)$  باشد، آنگاه بارها توسط رابطه  $dq/dt = I$  با جریان مولد  $I(t)$  مرتبط خواهند شد. با جدایی  $l$  کره ها از هم، ممان دوقطبی برابر با  $p(t) = q(t)l$  است و بنابراین جریان برابر با  $I(t) = \dot{p}/l$  می باشد. با توجه به مشخص شدن بارها و جریان ها در مکان های ثابت، می توان شکل ماکروسکوپیکی میدان های تاخیری را بیان کرد:



$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_v \left( \frac{[\rho] \mathbf{e}_R}{R^2} + \frac{[\frac{\partial \rho}{\partial t}] \mathbf{e}_R}{cR} - \frac{[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}]}{c^2 R} \right) dv' \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \int_v \left( \frac{[\mathbf{J}] \times \mathbf{e}_R}{cR^2} + \frac{[\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}] \times \mathbf{e}_R}{c^2 R} \right) dv' \end{cases} \quad (6.16)$$

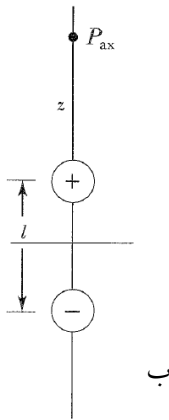
چون فقط یک منبع جریان (با اندازه جزئی) داریم، جمله‌های شامل  $\mathbf{J}$  را می‌توان با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{J} dv' \rightarrow I dl \rightarrow \dot{\mathbf{p}} \quad (6.17)$$

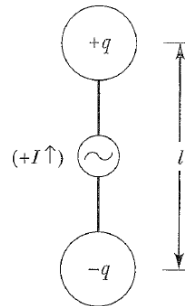
همچنین میدان مغناطیسی کل یک دوقطبی خطی وابسته به زمان در  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$  برابر است با:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\dot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{e}_R}{cr^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}] \times \mathbf{e}_R}{c^2 r} = \left( \frac{[\dot{\mathbf{p}}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{\mathbf{p}}]}{c^2 r} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \quad (6.18)$$

بنابراین جمله سوم میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  نیز تغییر می‌کند و برابر با  $[\ddot{\mathbf{p}}]/c^2 R$  خواهد شد و برای جمله دوم میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  نیز از جایگذاری  $pdv' \rightarrow q_\alpha$  (برای دو بار) استفاده خواهد شد. مطابق شکل ۶-۲ ب، نقطه  $P_{ax}$  روی محور دوقطبی در فاصله  $Z$  از مرکز دوقطبی قرار دارد. زمان تاخیری مناسب برای مرکز دوقطبی توسط  $t' = t - Z/c$  مشخص خواهد شد و فاصله بین زمان‌های تاخیری در مکان‌های دو بار و  $t'$ ، برابر با  $\Delta t = (l/2)/c$  می‌باشد. بار  $+q$  در زمان  $\Delta t$  دیرتر و بار  $-q$  در زمان  $\Delta t$  زودتر از  $t'$ ، مورد نیاز است چون سیگنال‌هایشان در این زمان‌ها به  $P_{ax}$  می‌رسند.



ب



الف

شکل ۶-۲. الف. دوقطبی نوسانی هرتزی. ب. روی محور دوقطبی

با استفاده از بسط تیلور مرتبه اول داریم:

$$\begin{cases} q(t' + \Delta t)_{\text{بالایی}} = q(t') + \dot{q}(t')\Delta t + \dots \\ q(t' - \Delta t)_{\text{پایینی}} = q(t') - \dot{q}(t')\Delta t + \dots \end{cases} \quad (6.19)$$

در این حالت خاص، جمله اول میدان الکتریکی  $\mathbf{E}$  در رابطه (۶.۱۶) در نقطه  $P_{ax}$  برابر خواهد بود با:

$$(\mathbf{E}_1)_{ax} = \left( \frac{q(t'+\Delta t)}{(z-\frac{l}{2})^2} - \frac{q(t'-\Delta t)}{(z+\frac{l}{2})^2} \right) \mathbf{e}_z = \frac{(z^2 + \frac{l^2}{4} + lz)(q + \frac{\dot{q}l}{2c}) - (z^2 + \frac{l^2}{4} - lz)(q - \frac{\dot{q}l}{2c})}{(z^2 - \frac{l^2}{4})^2} \mathbf{e}_z =$$

$$\frac{2(lz)(q)+2\left(z^2+\frac{l^2}{4}\right)\left(\frac{\dot{q}l}{2c}\right)}{\left(z^2-\frac{l^2}{4}\right)^2} e_z \rightarrow \frac{2[p]}{z^3} + \frac{[\dot{p}]}{cz^2} \quad (6.20)$$

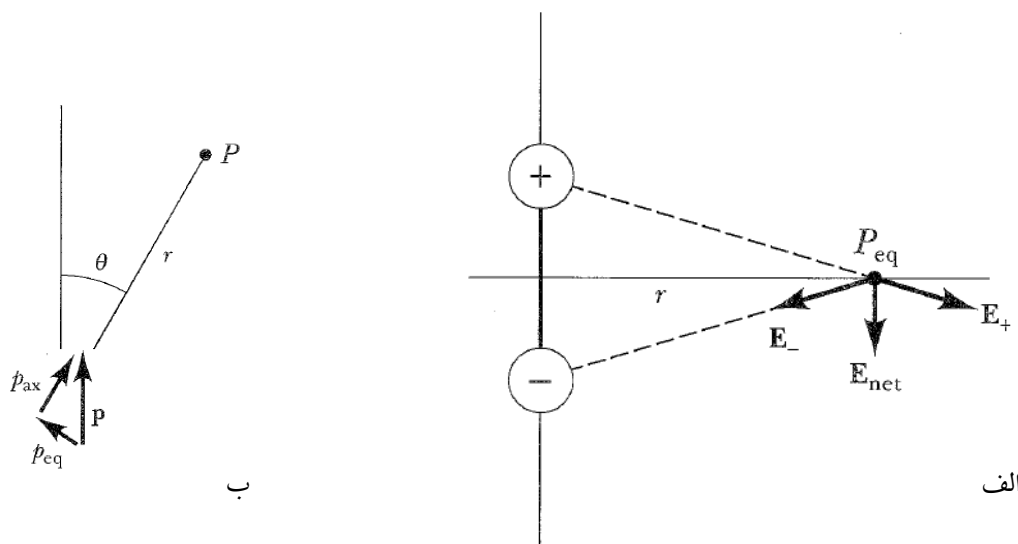
اولین جمله حاصل جدایی هندسه است و دومین جمله حاصل جدایی زمانی زمان‌های تاخیری است. همچنین جمله دوم میدان الکتریکی E در رابطه (۶.۱۶) در نقطه  $P_{ax}$  برابر خواهد بود با:

$$(E_2)_{ax} = \left( \frac{\dot{q}(t'+\Delta t)}{c(z-\frac{l}{2})^2} - \frac{\dot{q}(t'-\Delta t)}{c(z+\frac{l}{2})^2} \right) e_z = \frac{(z+\frac{l}{2})(\dot{q}+\frac{\dot{q}l}{2c}) - (z-\frac{l}{2})(\dot{q}-\frac{\dot{q}l}{2c})}{c(z^2-\frac{l^2}{4})} e_z =$$

$$\frac{2(\frac{l}{2})(\dot{q})+2(z)(\frac{\dot{q}l}{2c})}{c(z^2-\frac{l^2}{4})} e_z \rightarrow \frac{[\dot{p}]}{cz^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2z} \quad (6.21)$$

در یک حالت خاص دیگر، نقطه  $P_{eq}$  در صفحه استوایی دو قطبی ( $\theta = \pi/2$ ) در فاصله  $r$  از دو قطبی قرار دارد (دو بار مسافت مساوی دارند و اختلافی در تاخیرشان وجود ندارد). برهم نهی در مولفه میدان باعث ایجاد شعاعی از بارهای مربوطه یک میدان خاص در  $P_{eq}$  خواهد شد که در جهت  $e_\theta$  و پاد موازی با P است (شکل ۶-۳ الف):

$$\begin{cases} (E_1)_{eq} = 2 \frac{q}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)} \frac{\frac{l}{2}}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} e_\theta \rightarrow -\frac{[p]}{r^3} \\ (E_2)_{eq} = 2 \frac{\dot{q}}{c\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)} \frac{\frac{l}{2}}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} e_\theta \rightarrow -\frac{[\dot{p}]}{cr^2} \end{cases} \quad (6.22)$$



شکل ۶-۳. الف. در صفحه استوایی. ب. نقطه دلخواه

برای پیدا کردن  $E_2$  و  $E_1$  در یک نقطه دلخواه باید به تفکیک مولفه‌هایش پرداخت. یعنی نقطه میدان P بر روی محور دو قطبی مولفه  $P_{ax} = P \cos \theta$  و روی صفحه استوایی مولفه دیگر  $P_{eq} = P \sin \theta$  قرار خواهد گرفت (شکل ۶-۳ ب):

$$\begin{cases} E_1 = \left( \frac{2[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{cr^2} \right) \cos \theta e_r + \left( \frac{[p]}{r^3} \right) \sin \theta e_\theta \\ E_2 = \left( \frac{2[\dot{p}]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}]}{cr^2} \right) \cos \theta e_r + \left( \frac{[\dot{p}]}{r^3} \right) \sin \theta e_\theta \end{cases} \quad (۶.۲۳)$$

بردار واحد  $e_\theta$  در صفحه استوایی، پاد موازی با محور قطبی تعریف شده توسط  $P$  است و همچنین برای  $E_3$  داریم:

$$E_3 = -\frac{[p]}{cr^2} = -\frac{[\dot{p}]}{cr^2} \cos \theta e_r + \frac{[\ddot{p}]}{cr^2} \sin \theta e_\theta \quad (۶.۲۴)$$

بنابراین میدان الکتریکی کل، دوقطبی وابسته به زمان خواهد شد:

$$E(r, t) = E_1 + E_2 + E_3 = \left( \frac{2[p]}{r^3} + \frac{2[\dot{p}]}{cr^2} \right) \cos \theta e_r + \left( \frac{[p]}{r^3} + \frac{[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} \right) \sin \theta e_\theta \quad (۶.۲۵)$$

به طور مشابه، میدان مغناطیسی برابر است با:

$$B(r, t) = \left( \frac{[\dot{p}]}{cr^2} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} \right) \sin \theta e_\theta \quad (۶.۲۶)$$

بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که  $E$  یک مولفه شعاعی در ناحیه میدان نزدیک و  $B$  یک مولفه سمتی در هر فاصله دارد (تابش از یک دوقطبی الکتریکی وابسته به زمان، مغناطیسی عرضی  $TM$  است). در فواصل بزرگ که  $E_r \rightarrow 0$  می‌باشد، هر دو میدان عرضی هستند و تابش الکترومغناطیسی عرضی  $TEM$  است (تابش از یک دوقطبی مغناطیسی وابسته به زمان، الکتریکی عرضی  $TE$  است). همچنین وابستگی زمانی به صورت نوسان سینوسی  $[p] = p_0 e^{-i\omega t'}$  می‌باشد که در آن  $t' = t - r/c$  به عنوان زمان تاخیری معرفی می‌شود. در این حالت روابط میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با استفاده از  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$  تشریح خواهند شد:

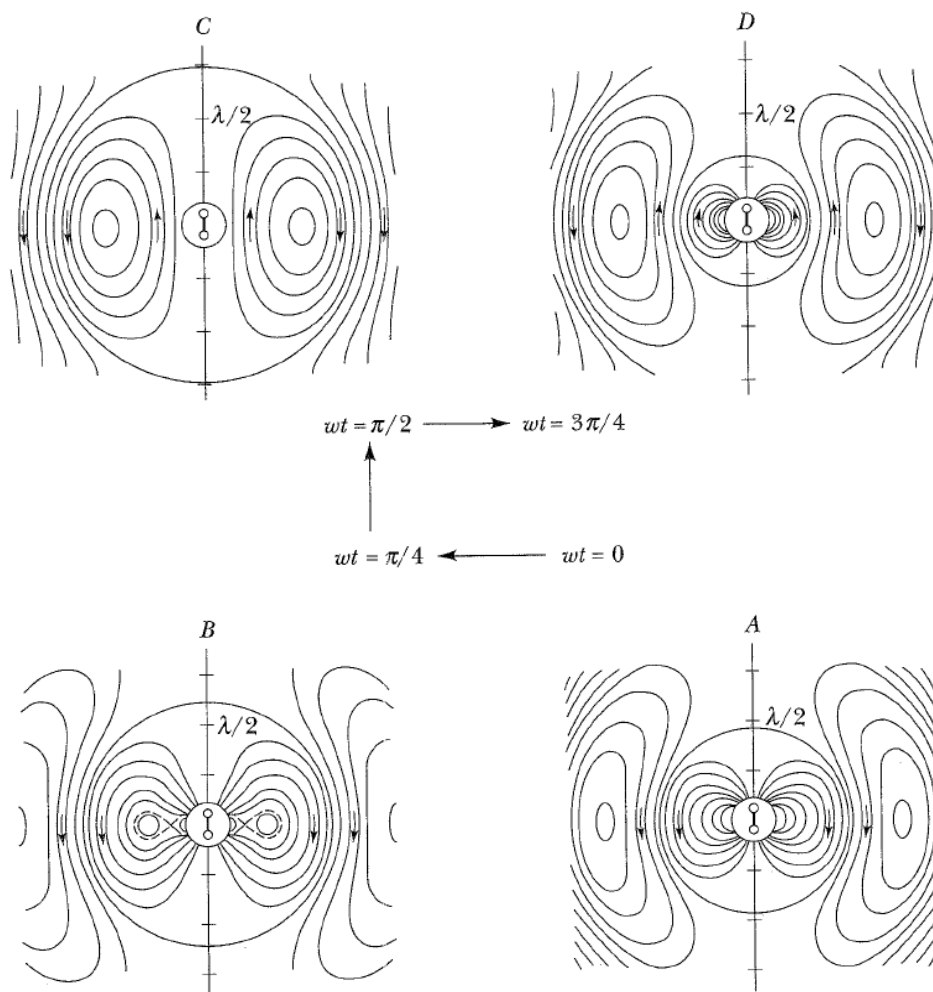
$$\begin{cases} E_r = 2p_0 k^3 \left( \frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} \right) \cos \theta e^{i(kr-\omega t)} \\ E_\theta = p_0 k^3 \left( \frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} - \frac{1}{kr} \right) \sin \theta e^{i(kr-\omega t)} \\ B_\phi = -p_0 k^3 \left( \frac{i}{(kr)^3} + \frac{1}{(kr)^2} \right) \sin \theta e^{i(kr-\omega t)} \end{cases} \quad (۶.۲۷)$$

مطابق شکل ۴-۶، خطوط میدان الکتریکی یک نیم سیکل از نوسان را در چهار لحظه نشان می‌دهند. میدان نزدیک در لحظه  $t = 0$ ، نماد دوقطبی استاتیکی است. هنگامی که زمان می‌گذرد، خطوط میدان برآمده می‌شوند و به سمت بیرون منتشر می‌شوند و سپس برای  $r$  بزرگ، کاملاً عرضی خواهد شد. جریان پمپ شده توسط مولد (برای حالت سینوسی) برابر است با:

$$I(t) = \frac{\dot{p}}{l} = -\frac{i\omega p_0}{l} e^{-i\omega t} = I_0 e^{-i\omega t} \quad (۶.۲۸)$$

بنابراین:

$$p_0^2 = -\left( \frac{I_0 l}{\omega} \right)^2 \quad (۶.۲۹)$$



شکل ۴-۶. نوسان‌های دوقطبی.

بنابراین معادلات لامور برای دوقطبی نوسانی (در جمله‌هایی از دامنه جریان  $I_0$ ) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{8\pi c^3} \sin^2 \theta = \frac{\pi I_0^2}{2c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (۶.۳۰)$$

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2 l^2 \omega^2}{3c^3} = \frac{4\pi^2 I_0^2}{3c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (۶.۳۱)$$

برای ماندگاری این تابش، مولد باید بتواند توان را به صورت پیوسته برای نوسان دوقطبی تامین کند. با مقایسه این حالت با حالت توان تولید شده به صورت حرارتی در مقاومت داریم:

$$\langle P \rangle_{heat} = \langle I^2 \rangle R = \frac{I_0^2 R}{2} \quad (۶.۳۲)$$

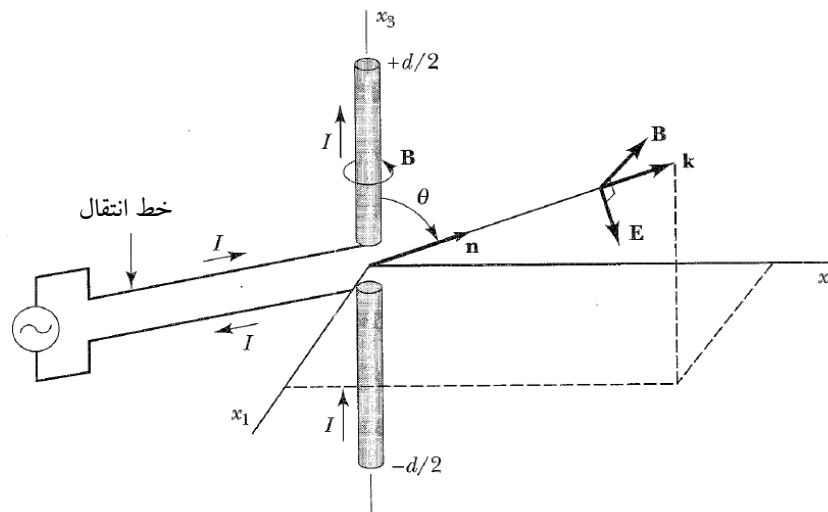
همچنین می‌توان فاکتور ضرب شده در  $I_0^2/2$  را به صورت مقاومت تابش آنتن دوقطبی معرفی کرد:

$$R_{heat} = \frac{8\pi^2}{3c} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{واحد گاوسی}) \quad (۶.۳۳)$$

## ۶-۴. آنتن‌های خطی

مطابق شکل ۵-۶، یک آنتن خطی مرکز محور وجود دارد که شامل دو سیم نازک با طول  $d/2$  (با یک فاصله کوچ بین‌شان) در جایی که سیگنال اعمال می‌شود، است. این سیگنال توسط یک مولد تولید می‌شود و توسط یک خط انتقال (که تابش نمی‌کند) منتقل می‌شود. اگر جریان اعمال شده، سینوسی با زمان باشد و فرکانس زاویه‌ای  $\omega$  باشد آن‌گاه جریان به صورت فضایی در طول سیم‌ها تغییر می‌کند. در انتهاهای بیرونی آنتن، جریان صفر است و در نقطه اعمال (در مرکز آنتن)، جریان غیر صفر است. با توجه به بردار موج  $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ ، اگر جریان به صورت موج ایستاده سینوسی تغییر کند آن‌گاه در انتهاهای بیرونی آنتن، گره دارد:

$$J(r', t_r) dv' \rightarrow I(x_3', t_r) dx_3' = e_3 I_0 e^{-i\omega t_r} \text{sinc}\left(\frac{d}{2} - |x_3'| \right) dx_3' \quad (۶.۳۴)$$



شکل ۵-۶. آنتن خطی مرکز محور.

همچنین سیگنال ورودی در مرکز برابر است با:

$$I_{gap}(t_r) = I_0 \frac{kd}{2} e^{-i\omega t_r} \quad (۶.۳۵)$$

در حالی که جریان‌ها در خط انتقال، مساوی و مخالف‌اند اما جریان‌ها در دو نیمه آنتن، مساوی و شبیه هستند. اگر این سیستم را فقط به میدان دور یا تابشی محدود کنیم، آن‌گاه باید جملاتی از معادله میدان تاخیری که به صورت  $1/R$  تغییر می‌کنند را حفظ کرد. در این هنگام استفاده از میدان مغناطیسی، ساده‌تر است چون تنها یک جمله وجود دارد که شامل  $\partial J / \partial t$  می‌باشد:

$$B_{rad} = \int_v \frac{[\frac{\partial J}{\partial t}] \times n}{c^2 R} dv' = -(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}) \frac{i\omega}{c^2 R} \int_v I(x_3', t_r) dx_3' \quad (۶.۳۶)$$

در اینجا از تقریب پیرامحوری استفاده شده است که در آن ابعاد آنتن در مقایسه با فاصله مشاهده، کوچک است:

$$r \gg \begin{cases} \lambda & \text{حد تابش} \\ d & \text{حد پیرامحوری} \end{cases} \quad (۶.۳۷)$$

چون میدان‌های تابشی، قائم و عرضی هستند بنابراین می‌توان  $B_{rad}$  را به صورت زیر بیان کرد:

$$E_{rad} = -\mathbf{n} \times B_{rad} = \mathbf{n} \times (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{n}) \frac{i\omega}{c^2 r} \int_{\nu} I(x_3', t_r) dx_3' \quad (۶.۳۸)$$

به دلیل نیاز بردار پویین تینگ ( $S_{rad} = (E_{rad} \times H_{rad})c/4\pi = n(B_{rad})^2 c/4\pi$ ) به بزرگی  $B_{rad}$ ، باید انتگرال  $B_{rad}$  را محاسبه کرد. برای دقیق بودن تاخیر فاز داخل توزیع جریان می‌توان از توزیع جریان سینوسی  $I(x_3')e^{-i\omega t_r}$  و  $k = \omega/c$  و  $t_r = t - |r - r'|/c$  استفاده کرد:

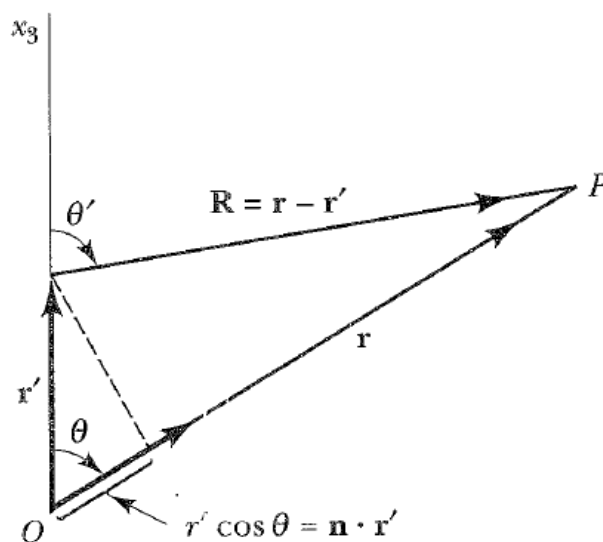
$$B_{rad} = (B_{rad})_{\phi} = -\sin\theta \frac{i\omega}{c^2 r} e^{-i\omega t} \int_{\nu} I(x_3') e^{-ik|r-r'|} dx_3' \quad (۶.۳۹)$$

با استفاده از شکل ۶-۶ و قانون کسینوس‌ها داریم:

$$|r - r'| = (r^2 - 2r \cdot r' + r'^2)^{\frac{1}{2}} \quad (۶.۴۰)$$

اگر  $r' \ll r$  باشد آنگاه رابطه (۶.۴۰) توسط بسط جمله‌ای، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|r - r'| = r \left[ 1 - \frac{n \cdot r'}{r} + \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{1}{8} \left( \frac{2n \cdot r'}{r} \right)^2 \right] = r \left[ 1 - \frac{r'}{r} \cos\theta + \frac{r'^2}{2r^2} \sin^2\theta + \dots \right] \quad (۶.۴۱)$$



شکل ۶-۶. فاز تعیین هندسه عناصر آنتن.

این بسط، فاز نوسان را در هر المان آنتن مشخص می‌کند، بنابراین در صورتی که شیف‌ت فاز کوچکتر از  $2n$  باشد آنگاه جملات درجه دوم در رابطه (۶.۴۱) بی‌اثر و قابل حذف خواهند شد. چون مقدار ماکزیمم  $r'^2 \sin^2\theta$  برابر با  $d/2$  است بنابراین شرط حذف جملات درجه دوم در آنتن خطی برابر با  $k(d/2)^2/2r \ll 2\pi$  می‌باشد و حد فرانهوفر برابر با

می‌باشد. این حدها (که در آنها فاصله مشاهده  $r$ ، بزرگ است) برابر با  $d \ll \sqrt{\lambda r} \ll r$  می‌باشند. حد فرانهوفر امکان این را فراهم می‌کند که تغییر فاز توسط تابع خطی  $r'$ ، تقریب زده شود:

$$|r - r'| \rightarrow r - n \cdot r' \rightarrow r - x'_3 \cos\theta \quad (۶.۴۲)$$

با قرار دادن رابطه (۶.۴۲) در انتگرال (۶.۳۹) برای جریان فرضی  $I(x'_3) e^{-ik|r-r'|} dx'_3$ ، داریم:

$$B_{rad}(r, \theta, t) = -\sin\theta \frac{\omega I_0}{c^2 r} e^{i(kr - \omega t)} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \text{sinc}\left(\frac{d}{2} - |x'_3|\right) e^{-ix'_3 \cos\theta} dx'_3 \quad (۶.۴۳)$$

$$\rightarrow B_{rad} = -\frac{2I_0}{cr} i e^{i(kr - \omega t)} \left( \frac{\cos\left(\frac{d}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta} \right) \quad (۶.۴۴)$$

بنابراین توان تابشی با متوسط گیری زمانی در واحد زاویه فضایی توسط آنتن خطی برابر است با:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = r^2 \langle S_{rad} \rangle \cdot n = \frac{cr^2}{4\pi} \langle B_{rad} \rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \left( \frac{\cos\left(\frac{d}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta} \right)^2 \quad (۶.۴۵)$$

توزیع زاویه‌ای توان تابشی به مقدار  $kd/2$  وابسته است و طول آنتن با طول موج نوسان محرک کننده، رابطه ساده‌ای دارد. اگر فرکانس این نوسان، طوری باشد که طول آنتن  $d$  یک عدد صحیح در نصف طول موج باشد ( $d = m\lambda/2 = m\pi/k$ ) آنگاه داریم:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \left( \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{m\pi}{2}}{\sin\theta} \right)^2 \quad (۶.۴۶)$$

توزیع جریان برای  $m = 1, 2, 3, 4$  در شکل ۶-۷ الف، نشان داده شده است. مقادیر مثبت و منفی  $I$ ، نمایشگر جهت‌های مختلف جریان در آنتن خواهند بود. توزیع زاویه‌ای برای حالت‌های نیم موج ( $m = 1$ ) و موج کامل ( $m = 2$ ) برابر است با:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_{m=1} = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \\ \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_{m=2} = \frac{2I_0^2}{\pi c} \frac{\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \end{cases} \quad (۶.۴۷)$$

بنابراین متوسط زمانی توان کل تابشی برابر است با:

$$\langle P \rangle = \int_0^\pi \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{I_0^2}{c} \int_0^\pi \frac{\left[ \cos\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{m\pi}{2} \right]^2}{\sin\theta} d\theta \quad (۶.۴۸)$$

با استفاده از روش محاسبات عددی می‌توان انتگرال مربوط به حالت آنتن نیم موج را محاسبه کرد:

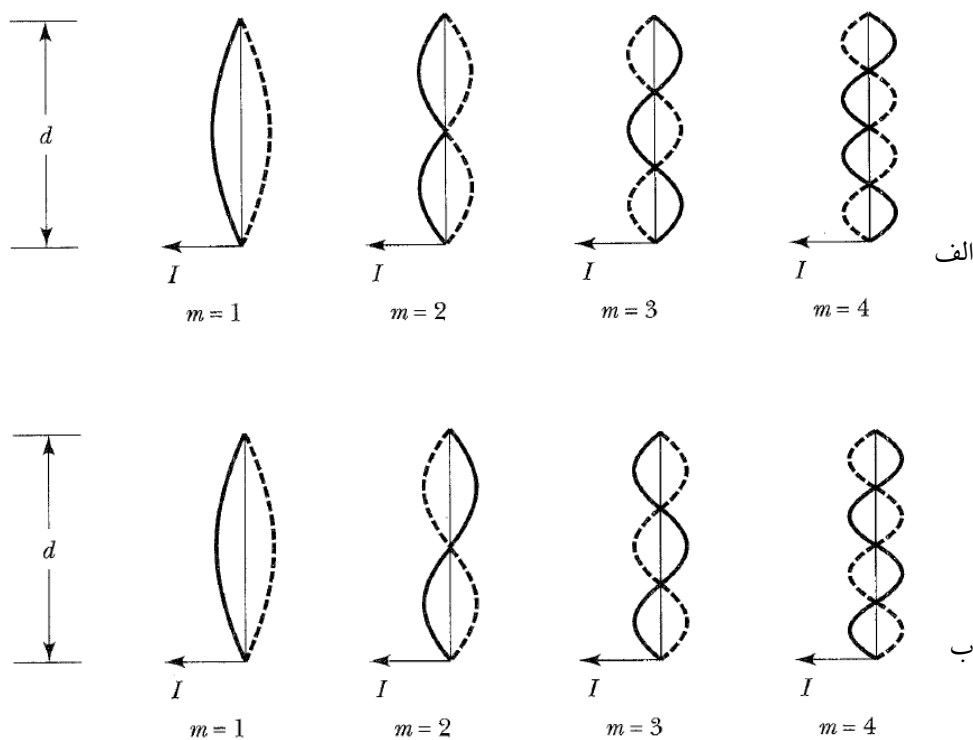
$$\langle P \rangle_{m=1} = 2.44 \frac{I_0^2}{2c} \quad (۶.۴۹)$$

و مقاومت تابشی حالت آنتن نیم موج برابر است با :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle R_{rad} \rangle_{m=1} &= \frac{2.44}{c} && \text{واحد گاوسی} \\ \langle R_{rad} \rangle_{m=1} &= \frac{2.44}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{2.44}{4\pi} \eta_0 = \frac{2.44}{4\pi} (377 \text{ اهم}) = 738 \text{ اهم} \end{aligned} \right. \quad (۶.۵۰)$$

بنابراین در هر حالت که  $m$  یک عدد صحیح فرد باشد، نقطه مرکز آنتن با آنتی گره جریان منطبق است و  $R_{rad}$ ، مقاومت بار خط انتقال است و در هر حالت که  $m$  یک عدد صحیح فرد نباشد، مقاومت نقطه محرک کننده آنتن مرکز محور به صورت جمله‌هایی از جریان  $I_{gap}$  بیان می‌شود :

$$(R_{rad})_{center-fed} = \frac{2\langle P \rangle}{|I_{gap}|^2} = \frac{I_0^2}{c \sin^2 \frac{m\pi}{2}} \int_0^\pi \frac{[\cos(\frac{m\pi}{2} \cos\theta) - \cos \frac{m\pi}{2}]^2}{\sin^2 \theta} d\theta \quad (۶.۵۱)$$



شکل ۶-۷. الف. آنتن‌های مرکز محور. ب. آنتن‌های تغذیه از انتها

آنتن تمام موج شبیه آنتن نیم موج است که هم فاز، تحریک می‌شوند. با جایگذاری مناسب آنتن نیم موج و انتخاب مناسب فاز جریان می‌توان طرح‌های تابشی متنوعی را بدست آورد (شکل ۶-۷ ب). هنگامی که  $m$  یک عدد صحیح فرد باشد، اگر آنتن از انتها، تحریک شود به یک حالت شبیه گریز از مرکز خواهیم رسید در غیر این صورت، فازهای نیم طول موج‌های مجاور تغییر می‌کند. برای حالت  $m$  فرد، توان تابشی برابر می‌شود با :

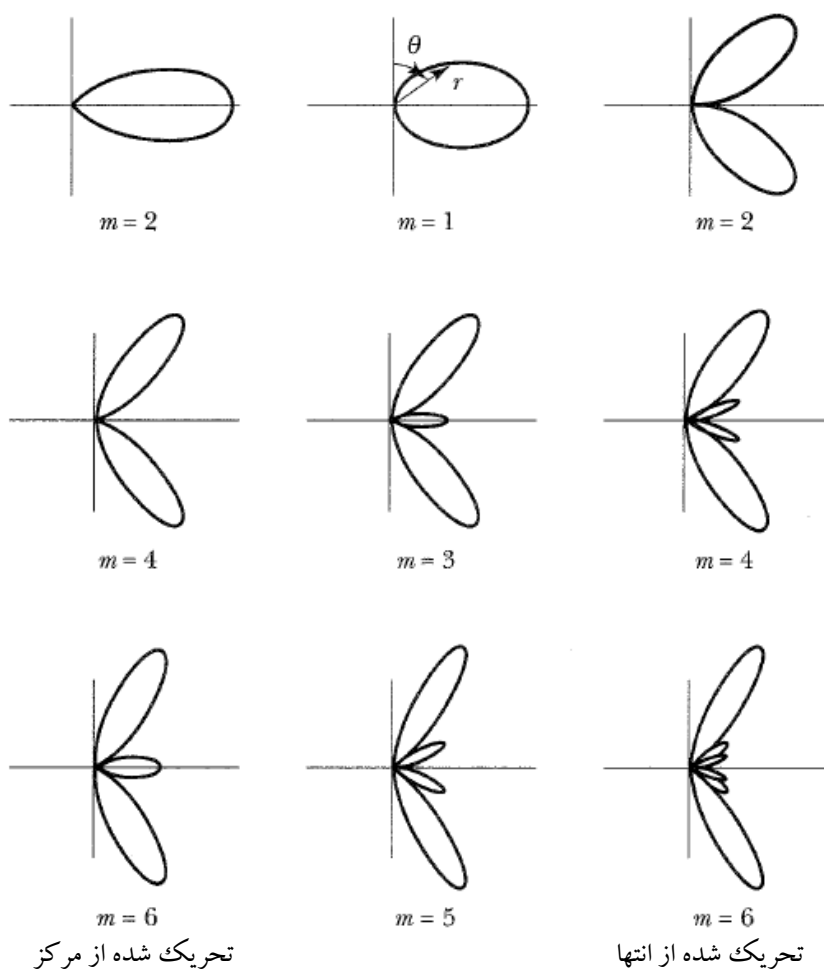
$$\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\cos^2(\frac{kd}{2} \cos\theta)}{\sin^2 \theta} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (۶.۵۲)$$



برای حالت  $m$  زوج و تغذیه از انتها، توان تابشی در واحد فضایی برابر می‌شود با (مقدار  $|x_3'|$  در رابطه (۶.۴۳) حذف خواهد شد):

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{I_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta} \quad m_{end} = 2, 4, 6, \dots \quad (۶.۵۳)$$

طرح تابشی  $m = 1$  تا  $m = 6$  در شکل ۶-۸، نشان داده شده است. حالت‌های  $m = 1$  و  $m = 2$  که از مرکز تحریک شده‌اند، مشابه طرح‌های  $\sin^2\theta$  دوقطبی هر تزی هستند. حالت  $m = 2$  تحریک شده از انتها و حالت  $m = 4$  تحریک شده از مرکز، شبیه چهار قطبی خطی هستند. هنگامی که آنتن زیاد شود آنگاه لوب‌های تابش اصلی به جهت آنتن نزدیک‌تر خواهند شد و تابش کوچکی در کناره‌ها قرار خواهد گرفت.



شکل ۶-۸. طرح تابشی آنتن‌های خطی.

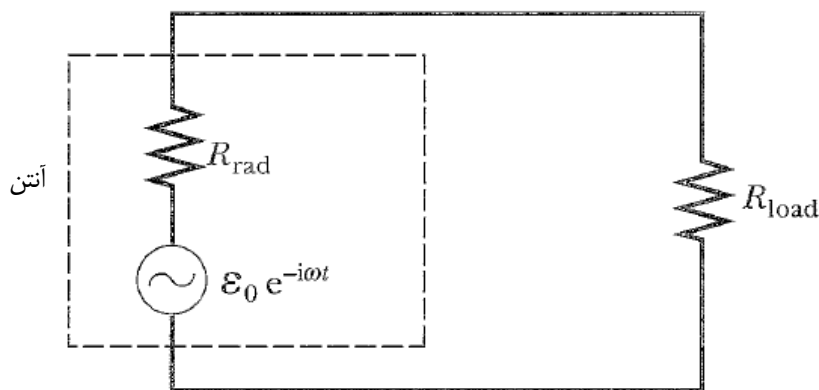
### ۶-۵. جهت‌گیری آنتن و سطح موثر

سیستم‌های تابشی در بعضی از جهت‌ها با شدت بیشتری از جهت‌های دیگر، تابش می‌کنند. یعنی تابش یکنواخت در تمامی جهت‌ها برای یک آنتن، غیرممکن است. یکی از بهترین نوع آنتن‌ها، آنتنی است که تابشی در یک جهت خاص داشته

باشد (تک بعدی باشد) و اگر این آنتن به عنوان دریافت کننده استفاده شود، به امواج الکترومغناطیسی که در جهت مشابه می آید، حساس خواهد بود. جهت گیری یک آنتن به صورت زیر تعریف می شود:

$$G(\theta, \varphi) = \frac{\text{مقدار ماکزیمم توان تابش شده در واحد زاویه فضایی}}{\text{توان متوسط تابش شده در واحد زاویه فضایی}} = \frac{\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle}{\frac{\langle P \rangle}{4\pi}} \quad (۶.۵۴)$$

جهت گیری معیاری است از اینکه چه مقدار شدت بیشتری (در جهت خاص) نسبت به یک تابش گر همسان گرد (که با توان مشابه تغذیه شده است) تابش می کند. اگر آنتن، فرستنده باشد آنگاه جریان ایجاد شده توسط مواد در آنتن، یک موج الکترومغناطیسی به سمت بیرون در ناحیه دور، تابش می کند. اما در حالت برعکس که آنتن دریافت کننده است، یک موج الکترومغناطیسی ورودی یک جریان در آنتن تولید می کند و دارای مقاومت  $R_{load}$  خواهد بود. مطابق شکل ۹-۶، آنتن دریافت کننده شامل یک نیروی محرکه القایی به بزرگی  $\epsilon_0 e^{-i\omega t}$  و دارای یک مقاومت داخلی برابر با مقاومت تابشی  $R_{load}$  است.



شکل ۹-۶. مدار معادل آنتن دریافت کننده.

تئوری ماکزیمم توان انتقال، بیان می کند که هنگامی یک مولد با مقاومت داخلی ثابت می تواند ماکزیمم توان را به بار منتقل کند که مقاومت بار برابر با مقاومت داخلی باشد. این توان، بهینه دریافت شده توسط بار خواهد بود:

$$\langle P \rangle_{max} = \frac{\epsilon_0^2}{8 R_{rad}} \quad (۶.۵۵)$$

سطح موثر  $A$  آنتن دریافت کننده هنگامی که ضرب در بردار پوئین تینگ متوسط زمانی  $\langle S \rangle$  موج فرودی شود آنگاه با ماکزیمم توان دریافتی، برابر خواهد شد:

$$\langle P \rangle_{max} = \langle S \rangle A \quad (۶.۵۶)$$

$A$  در رابطه (۶.۵۶)، سطح جبهه موج فرودی است که توسط آنتن دریافت کننده، محدود می شود و به مدار بالا می رود. سطح موثر هر آنتن با جهت گیری  $G$ ، برابر با  $A = G\pi\lambda^2$  است ( $\lambda = \lambda/2\pi$ ). برای ایجاد تبادل بین آنتن گیرنده و فرستنده باید یک مولد، توان  $P_{in}$  را به آنتن فرستنده برساند که در فاصله  $r$  به سمت یک آنتن گیرنده هدف گیری شده

است. آنتن گیرنده، سیگنال فرستاده شده را جذب می کند و توان  $P_{out}$  را به مدار بارش می رساند. بنابراین آنتن فرستنده، توان در واحد سطح بردار پوئین تینگ را در فاصله  $r$  تولید می کند:

$$S(r) = G_i \frac{P_{in}}{4\pi r^2} \quad (6.57)$$

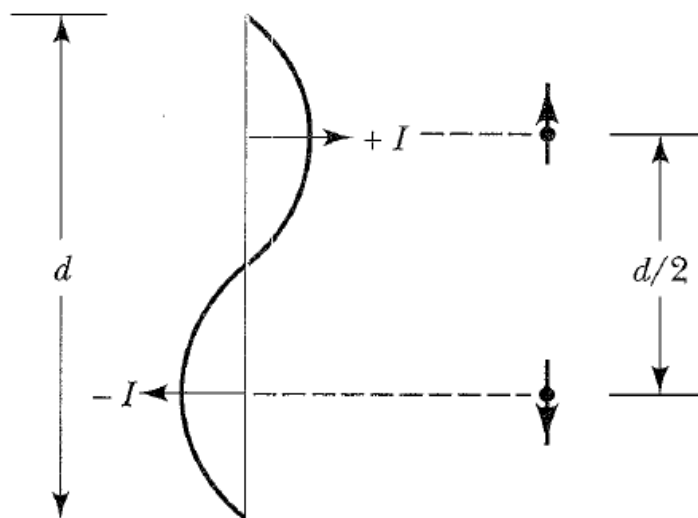
و توان دریافت شده برابر با  $P_{out} = S G_r A_o$  است. بنابراین داریم:

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = G_t G_r \left( \frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 = \frac{A_t A_r}{4\pi r^2} \quad \text{انتقال فرمول Friis} \quad (6.58)$$

رابطه (۶.۵۸)، قابلیت تبادل بین آنتن گیرنده و فرستنده را نشان می دهد.

### ۶-۶. تابش چهارقطبی الکتریکی

مطابق شکل ۶-۱۰، می توان آنتن را توسط دو دو قطبی نقطه ای که به صورت خطی با فاصله  $d/2$  از هم قرار دارند و خارج از فاز نوسان می کنند، تقریب زد. ممان های این دو قطبی ها همیشه به صورت مخالف، جهت گیری خواهند شد به طوری که هیچ ممان دو قطبی خالصی وجود ندارد. اما سیستم یک ممان چهارقطبی دارد و چون این ممان با زمان تغییر می کند، بنابراین تابش گسیل خواهد شد.



شکل ۶-۱۰. مدل چهارقطبی.

اگر میدان چهارقطبی به صورت برهم نهی میدان های دو قطبی باشند و اگر یک دو قطبی در مبدا قرار داشته باشد، آنگاه وابستگی زمانی ممان دو قطبی برابر خواهد بود با:

$$p(t') = [p] = p_0 e^{-i\omega t'} \quad (6.59)$$

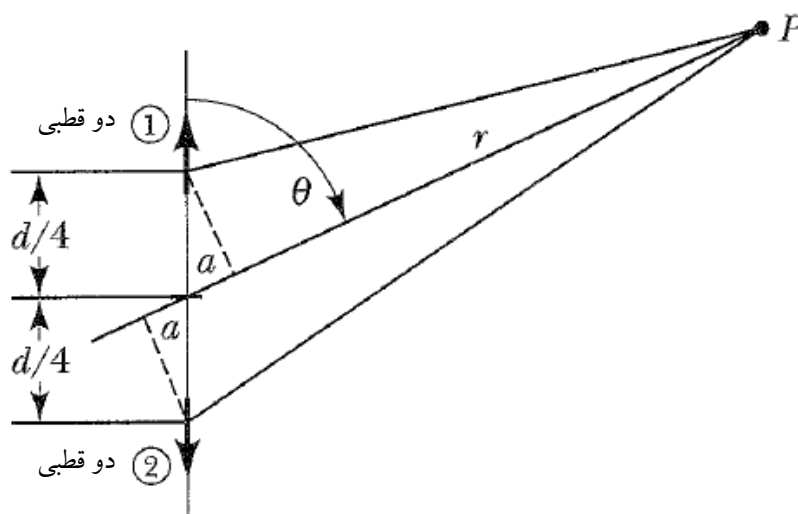
$$\rightarrow \ddot{p}(t') = [\ddot{p}] = -\omega^2 p_0 e^{-i\omega t'} \quad (6.60)$$

بنابراین تنها مولفه بردار میدان در ناحیه تابش است :

$$E_{\theta} = \frac{[\dot{p}]}{c^2 r} \sin\theta = -\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta e^{-i\omega t'} \quad (6.61)$$

مطابق شکل ۱۱-۶، می توان میدان کل دو دوقطبی را در مکان های  $d/2$  و  $-d/2$  مشخص کرد. تابش دوقطبی ۱ به نقطه  $P$  از مبدا، به مقدار  $a = (d/4)\cos\theta$  نزدیک تر است و تابش دوقطبی ۲ به نقطه  $P$  از مبدا، به مقدار  $a = (d/4)\cos\theta$  دورتر است. بنابراین فاز دوقطبی ۱ نسبت به مبدا برابر با  $-(kd/4)\cos\theta$  است ( $k = \omega/2$ ) و به طور مشابه فاز دوقطبی ۲ نسبت به مبدا برابر با  $+(kd/4)\cos\theta \pm n$  است (فاکتور فاز  $\pm n$ ، به این دلیل اضافه شده دو دوقطبی، خارج از فاز نوسان می کنند). مولفه  $\theta$  بردار الکتریکی برای جفت دوقطبی است (در ناحیه تابش  $E_{\theta} = \beta_{\varphi}$ ):

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= -\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \left\{ \exp\left[-i\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right)\right] + \exp\left[i\left(\frac{kd}{4}\cos\theta \pm \pi\right)\right] \right\} \exp[e^{-i\omega t'}] \\ &= -\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \left\{ \exp\left[-i\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right)\right] - \exp\left[i\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right)\right] \right\} \exp[-i\omega t'] \\ &= -\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \left\{ -2i \sin\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right) \right\} \exp[-i\omega t'] \\ &= 2i \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \sin\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right) e^{-i\omega t'} = \beta_{\varphi} \quad (6.62) \end{aligned}$$



شکل ۱۱-۶. هندسه دو دوقطبی.

اگر دوقطبی ها به اندازه نصف طول موج، از هم جدا شود و  $kd = 2\pi$  باشد، آنگاه :

$$E_{\theta} = \beta_{\varphi} = 2i \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) e^{-i\omega t'} \quad (6.63)$$

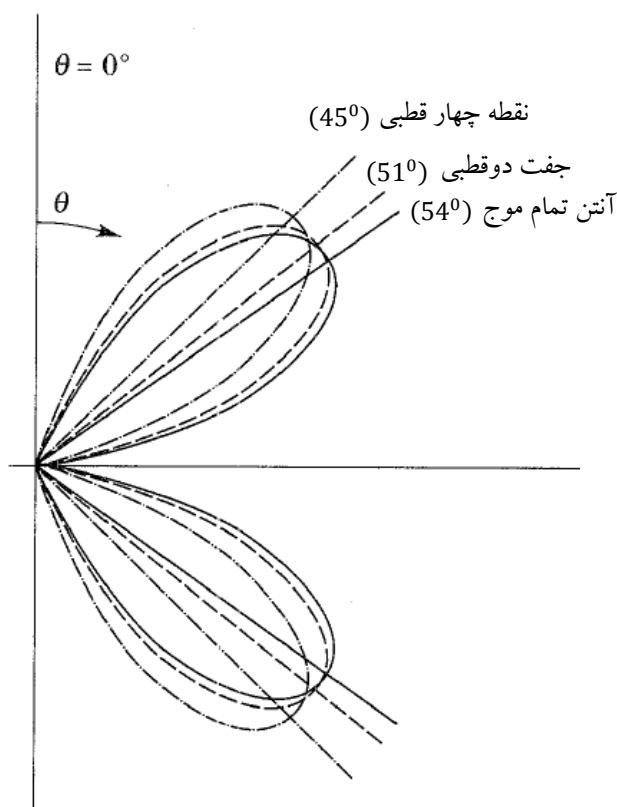
همچنین متوسط زمانی بردار پوئین تینگ برابر است با :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle E_{rad} \rangle = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{rad} \times B_{rad}^*) \\ \text{یا} \\ \langle E_{rad} \rangle \cdot n = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(E_{\theta} B_{\varphi}^*) = \frac{\omega^4 p_0^2}{2\pi c^3 r^2} \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \end{array} \right. \quad (6.64)$$

ممان چهارقطبی برای دوقطبی برابر با  $Q = 2p_0 d$  است. همچنین با استفاده از  $\omega/c = 2\pi/d$ ، داریم:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = r^2 \langle S_{rad} \rangle \cdot n = \frac{\omega^6 Q^2}{32\pi^3 c^5} \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \theta \right) \quad (6.65)$$

فرم توزیع زاویه‌ای تابش گسیل شده با نتایج بدست آمده از محاسبات آنتن، متفاوت است اما در توزیع کاملاً شبیه هم هستند. مطابق شکل ۶-۱۲، می‌توان طرح تابش که به مقدار ماکزیمم مشابه، نرمالیزه شده است، قابل نمایش خواهد بود که در آن چهارقطبی جفت دوقطبی به آنتن خطی تمام موج، خیلی نزدیک است.



شکل ۶-۱۲. الگوی تشعشع مدل چهارقطبی نوسانی.

در یک سیستم ساده‌تر، اگر دو دوقطبی که روی هم قرار گرفته باشند و یک چهار قطبی محوری نقطه‌ای که در مبدا قرار داده شده است را بسازند، آنگاه می‌توان فرض کرد که  $kd$  در آن یک کمیت کوچک است:

$$\sin \left( \frac{kd}{4} \cos \theta \right) \approx \frac{kd}{4} \cos \theta \quad (6.66)$$

بنابراین داریم:

$$E_{\theta} = i \left( \frac{\omega^2 p_0 k d}{2c^2 r} \right) \sin\theta \cos\theta e^{-i\omega t'} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \frac{cr^2}{8\pi} \operatorname{Re}(E_{\theta} B_{\varphi}^*) = \frac{cr^2}{8\pi} |E_{\theta}|^2 = \frac{\omega^4 k^4 p_0^2 d^2}{32\pi c^3} \sin^2\theta \cos^2\theta \\ &= \frac{\omega^6 Q^2}{32\pi c^5} \sin^2\theta \cos^2\theta \end{aligned} \quad (6.68)$$

همچنین توان تابش شده در در زاویه ۴۵ درجه به ماکزیمم می‌رسد و برای این حالت، تابش کل برابر است با:

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{\omega^6 Q^2}{240 c^5} \quad (6.69)$$

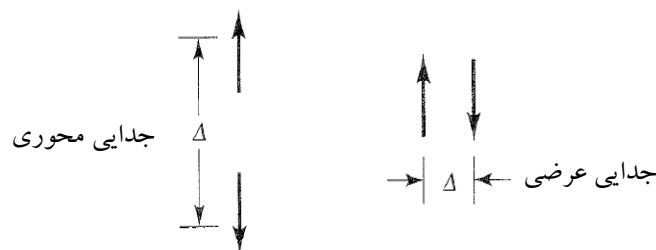
توان تابشی توسط یک چهارقطبی به دوقطبی، نوسانی است:

$$\frac{\langle P \rangle_{\text{چهار قطبی}}}{\langle P \rangle_{\text{دو قطبی}}} = \frac{\frac{\omega^6 Q^2}{240 c^5}}{\frac{\omega^4 p_0^2}{3 c^3}} = \frac{\omega^2 Q^2}{80 c^2 p_0^2} \quad (6.70)$$

ممان دوقطبی، حاصل ضرب  $q$  در طول مشخصه  $d$  است و ممان چهارقطبی، حاصل ضرب  $q$  در مربع طول مشخصه  $d$  است:

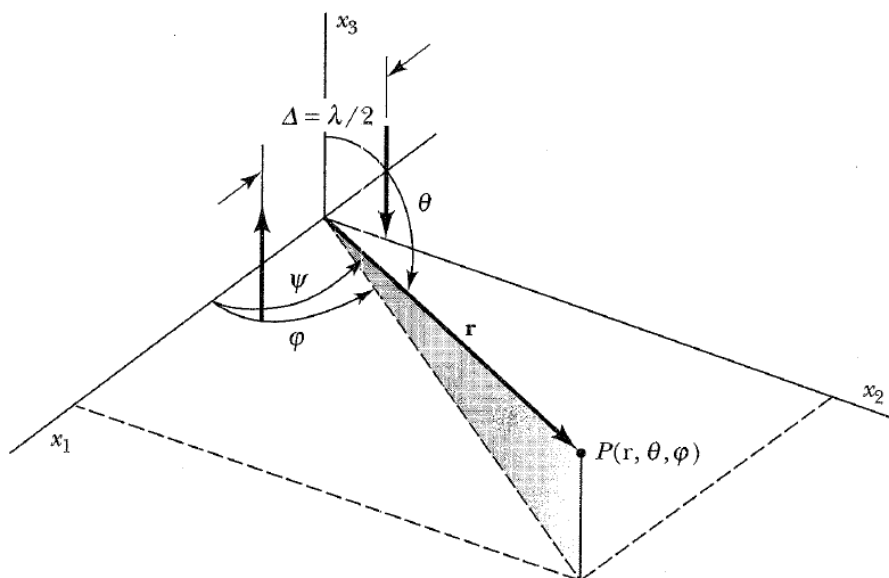
$$\frac{\langle P \rangle_{\text{چهار قطبی}}}{\langle P \rangle_{\text{دو قطبی}}} \cong \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \quad (6.71)$$

یعنی اگر فرض کنیم که یک مجموعه دلخواه از بارهای متحرک باشد که در یک ناحیه با اندازه  $d$  ( $d \ll \lambda$ ) جای‌گزیده‌اند. اگر مجموعه یک ممان دوقطبی شتاب‌دار (نوسانی) داشته باشد، به صورت یک دوقطبی تابش می‌کند (ممکن است تابش چهارقطبی وجود داشته باشد اما می‌توان از آن صرف‌نظر کرد). همچنین برای حالت  $d \sim \lambda$  (منابع گسترده)، آرایه‌ای از دوقطبی‌های تابش‌کننده همزمان شده‌اند. مطابق شکل ۱۳-۶ می‌توان جدایی محوری دوقطبی و جدایی عرضی دو قطبی را مورد بررسی قرار داد که هر دو جدایی دارای ممان دوقطبی صفر و ممان چهارقطبی غیر صفر هستند.



شکل ۱۳-۶. جدایی محوری دوقطبی و جدایی عرضی دو قطبی.

مطابق شکل ۱۴-۶، می‌توان حالت خاص جدایی  $\Delta$  برابر با نصف طول موج را بررسی کرد. فازهای بردارهای میدان در جهت  $d$  توسط افزایش راه  $\pm(\Delta/2)\cos\psi = \pm(\lambda/4)\sin\theta \cos\varphi$  تغییر کرده‌اند.



شکل ۶-۱۴. نمایی از چهارقطبی جانبی.

مولفه  $\theta$  بردار میدان الکتریکی برابر است با:

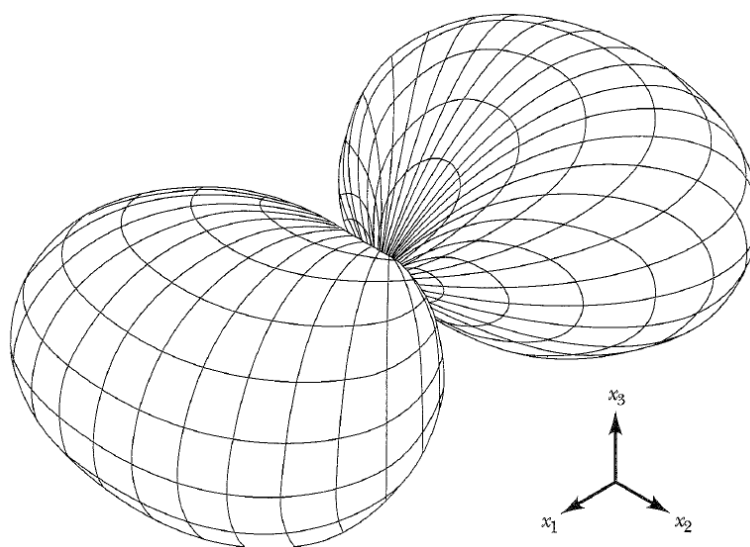
$$E_{\theta} = -\frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \left\{ \exp\left[-i\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right)\right] + \exp\left[i\left(\frac{kd}{4}\cos\theta \pm \pi\right)\right] \right\} \exp[e^{-i\omega t'}]$$

$$= 2i \frac{\omega^2 p_0}{c^2 r} \sin\theta \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) \exp[-i\omega t'] \quad (6.72)$$

بنابراین توزیع زاویه‌ای تابش برابر است با:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{4\pi c^3} \sin^2\theta \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin\theta \cos\varphi\right) \quad (6.73)$$

مطابق شکل ۶-۱۵، می‌توان طرح تابش حاصل را مورد بررسی قرار داد:



شکل ۶-۱۵. طرح تابشی چهارقطبی جانبی.

۱. هیچ یک از مولفه‌های دو قطبی در جهت اندازه  $x_3$  (یا  $\theta = 0$ ) تابش نمی‌کند. بنابراین جفت آنها نیز تابش نمی‌کند.

۲. میدان‌های خلاف جهت هم دو قطبی‌ها در راستای محور  $x_2$  حذف می‌شوند ( $\theta = \pi/2$  و  $\varphi = +\pi/2$ ).

۳. میدان‌ها به دلیل فاصله  $\lambda/2$ ، روی محور  $x_1$  هم فاز هستند و جمع می‌شوند ( $\theta = 0$  یا  $\pi$  و  $\varphi = \pi/2$ ).

بنابراین طرح تابش دارای دو بعد در محور  $x_1$  است. خطوط بعدها در صفحات  $x_1 - x_2$  و  $x_1 - x_3$  توسط روابط زیر بیان خواهد شد:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 \text{ صفحه } (\varphi = 0) : \sin^2 \theta \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \sin \theta \right) \\ x_1 - x_2 \text{ صفحه } \left( \theta = \frac{\pi}{2} \right) : \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos \varphi \right) \end{cases} \quad (۶.۷۴)$$

این طرح به شدت به جدایی  $\Delta = \lambda/2$  حساس است و اگر  $\Delta = \lambda$  باشد، طرح تابش شبیه به چهار قطبی محوری خواهد بود.

## ۶-۷. آرایه آنتن

برای محاسبه تابش یک جفت دو قطبی در هر آرایه آنتن، باید میدان‌های مجزا المان‌های آرایه را به طرح تابش اضافه کرد و با در نظر گرفتن فازهایشان، مربع نتایج را برای محاسبه بزرگی پوئین تینگ و طرح توان تابش شده بدست آورد (المان‌های آرایه، دو قطبی‌های نیم موج هستند و در راستای  $x_3$  جهت گیری کرده‌اند). میدان مغناطیسی تابشی هر المان برابر است با:

$$B_\varphi = -\frac{2I_0}{cr} \left( \frac{\cos\left(\frac{kd}{4}\cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{4}}{\sin\theta} \right) i e^{-i(kr - \omega t)} \quad (۶.۷۵)$$

برای محاسبه میدان در حالت نیم موج ( $kd = \pi$ )، داریم:

$$B_\varphi = -\frac{2I_0}{cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} i e^{-i\omega t'} = E_\theta \quad (۶.۷۶) \quad (t' = \text{زمان تاخیری در مبدا})$$

مطابق شکل ۱۴-۶، برای حالتی که دو قطبی‌های هر تزی توسط آنتن نیم موج جایگزین شده است و با در نظر گرفتن تغییر فاز دو آنتن نسبت به مبدا داریم:

$$\begin{aligned} E_\theta = B_\varphi &= -\frac{2I_0}{cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left\{ \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta \cos\varphi\right)\right] - \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta \cos\varphi\right)\right] \right\} \\ \exp[e^{-i\omega t'}] &= -4 \frac{I_0}{cr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} \left(\frac{\pi}{2}\sin\theta \cos\varphi\right) \exp[e^{-i\omega t'}] \end{aligned} \quad (۶.۷۷)$$

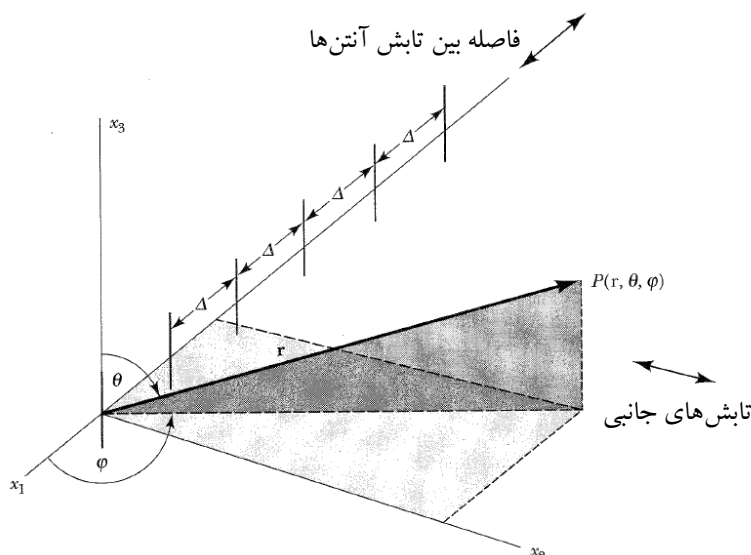
توزیع زاویه‌ای تابش گسیل شده برابر است با (کاملاً شبیه به حالت دو قطبی):

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{cr^2}{8\pi} |E_\theta|^2 = \frac{2I_0^2}{\pi c} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right) \left(\frac{\pi}{2}\sin\theta \cos\varphi\right)}{\sin^2\theta} \quad (۶.۷۸)$$



مطابق شکل ۱۶-۶، برای یک آرایه خطی از  $N$  آنتن نیم موج، فاصله  $\Delta$  بین آنتن‌های همسایه وجود دارد. اگر همه آنتن‌ها به صورت هم فاز تحریک شوند و یک انتهای آرایه به عنوان مبدا در نظر گرفته شود آنگاه میدان تولید شده توسط المان‌های پشت سر هم آرایه در نقطه  $P(r, \theta, \varphi)$ ، به اندازه  $\alpha = \kappa \Delta \sin \theta \cos \varphi$  اختلاف فاز دارند. بنابراین میدان کل برابر است با:

$$\begin{aligned} E_{\theta} = B_{\varphi} &= -\frac{2I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{cr} i e^{-i\omega t'} \{1 + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{(N-1)i\alpha}\} = \\ &= -\frac{2I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{cr} i e^{-i\omega t'} \left\{ \frac{e^{iN\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \right\} = -\frac{2I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{cr} i e^{-i\omega t'} \frac{e^{i\frac{N}{2}\alpha} (e^{i\frac{N}{2}\alpha} - e^{-i\frac{N}{2}\alpha})}{e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})} = \\ &= -\frac{2I_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{cr} i e^{-i\omega t'} e^{i\frac{(N-1)}{2}\alpha} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2I_0}{cr} \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{\sin\left(\frac{N}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right| \end{aligned} \quad (۶.۷۹)$$



شکل ۱۶-۶. آرایه خطی از  $N$  آنتن نیم موج.

توزیع فضایی تابش شده برابر است با:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{cr^2}{8\pi} |E_{\theta}|^2 = \left( \frac{I_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{2\pi c} \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right) = \text{(نیم موج استاندارد)} \text{(آرایه خطی } N \text{ المانی)} \quad (۶.۸۰)$$

طبق رابطه (۶.۸۰)، اگر آرایه مشابهی وجود داشته باشد اما المان‌ها به چیزی غیر از آنتن نیم موج، تغییر کنند آنگاه پراختز اول تغییر می‌کند و پراختز دوم ثابت می‌ماند. اگر آرایه تغییر کند اما المان تغییر نکند آنگاه پراختز دوم تغییر می‌کند و پراختز اول ثابت می‌ماند. بنابراین طرح تابش از دو فاکتور تابع المان و تابع آرایه تشکیل می‌شود. تابع آرایه در این حالت برابر است با:

$$f^2(\alpha) = \left( \frac{\sin^2(\frac{N}{2}\alpha)}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} \right) \quad (\alpha \equiv \kappa\Delta \sin\theta \cos\varphi = \kappa\Delta \frac{x_1}{r}) \quad (۶.۸۱)$$

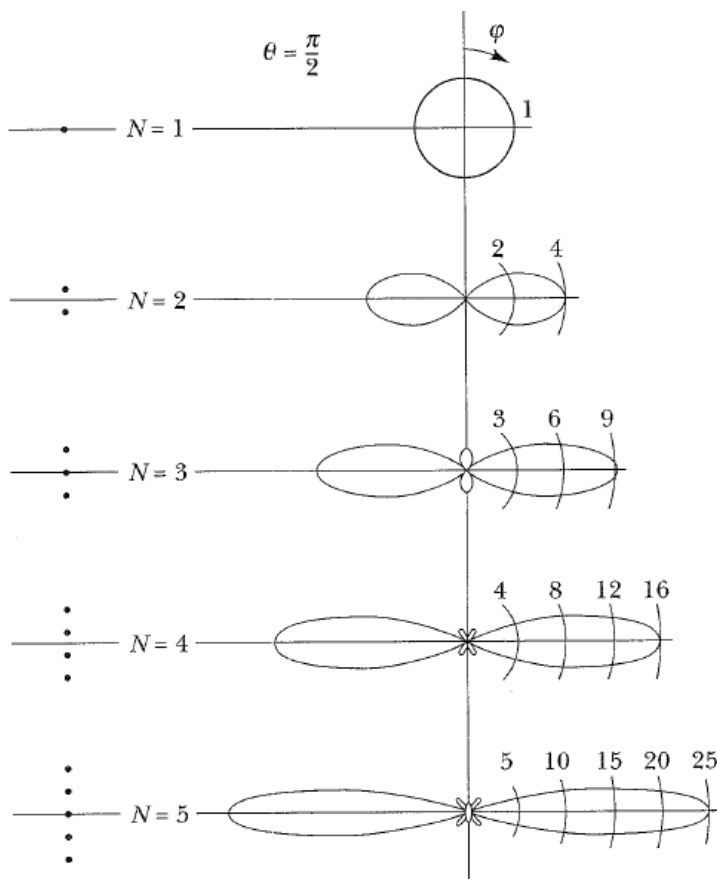
تابع (۶.۸۱) صفر خواهد شد زیرا صورت کسر آن صفر است :

$$\pm\alpha = \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \frac{6\pi}{N}, \dots, \frac{(N-1)2\pi}{N}, \frac{(N+1)2\pi}{N}, \dots \quad (۶.۸۲)$$

وقتی ... و  $2\pi$  و  $\pm\alpha = 0$  باشد، مخرج کسر نیز صفر می شود و حد هوییتال برابر با  $f^2(0)$  خواهد بود. این حد به عنوان ماکزیمم اصلی تابع است. ماکزیمم دوم (طرح تابش لوب کناری) در صورتی اتفاق می افتد که :

$$\pm\alpha = \frac{3\pi}{N}, \frac{5\pi}{N}, \dots, \frac{(2N-3)\pi}{N}, \frac{(2N+3)\pi}{N}, \dots \quad (۶.۸۳)$$

$(N - 2)$  ماکزیمم بین ماکزیمم اصلی اتفاق می افتد. برای بررسی  $f^2(\alpha)$  به صورت تابعی از مکان واقعی، ماکزیمم مقدار  $\alpha$  برابر با  $\kappa\Delta = (2\pi/\lambda)\Delta$  می باشد. بنابراین هنگامی که فاصله  $\Delta$  کمتر از طول موج است، فقط یک ماکزیمم وجود دارد. شکل ۱۷-۶، طرح تابشی را برای  $\Delta = \lambda/2$  (در  $N = 1$  تا  $N = 5$ ) و به صورت تابعی از  $\varphi$  در صفحه  $\theta = \pi/2$  به نمایش می گذارد. طرح تابش لوب کناری برای آرایه همه المان ها، هم فاز است و شدت متناسب با مربع جمع دامنه ها، مجزا است (بنابراین یک شدت برای آرایه ۵ المانی، ۲۵ برابر شدت تک آنتن نیم موج است).



شکل ۱۷-۶. طرح تابشی برای آنتن های هم فاز با فاصله  $\lambda/2$ .

سهم المان‌های مجزا در جفت‌ها در محدوده  $\varphi = 0$  تا  $\varphi = \pi$  خنثی می‌شود (شدت در این جهت‌ها برای  $N$  زوج، صفر است و برای  $N$  فرد، معادل با تک المان است). اگرچه هنگامی که  $N$  زیاد شود، لوب اصلی نسبت به  $\varphi$ ، باریک‌تر خواهد شد و پهنای لوب در بعد  $\theta$  توسط تابع المان، کنترل می‌شود. بنابراین تاثیر کمی از المان دارد. یک طرح تابش که در یک جهت، باریک است اما در جهت دیگر پهن است، باریکه پهن‌ای (*fan beam*) نامیده می‌شود. یک آرایه خطی المان‌های آنتن که به اندازه  $\Delta = \lambda/2$  جدا هستند اما توسط فازهای متناوب، تحریک می‌شوند یک ماکزیمم اصلی تابش در امتداد  $\pi$  و  $\varphi = 0$  دارند چون دامنه‌ها و میدان، دو صفحه آرایه به صورت هم‌فاز جمع می‌شوند. این سیستم به عنوان یک آرایه تمام موج (*end-fire*) نامیده می‌شود.

### ۶-۸. تابش دوقطبی مغناطیسی

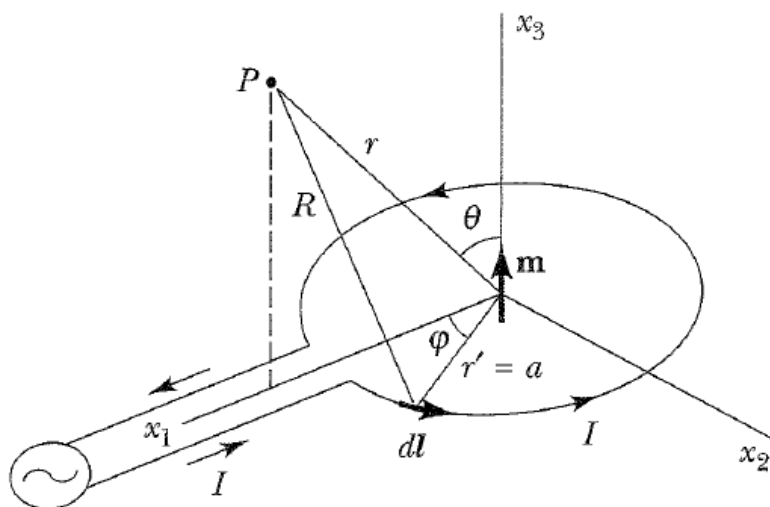
یک توزیع عمومی از بار و جریان می‌تواند هر دو ممان دوقطبی الکتریکی و مغناطیسی را داشته باشد. بنابراین علاوه بر تابش از دوقطبی الکتریکی متغیر زمان و چهارقطبی متغیر زمان، تابش دوقطبی مغناطیسی متغیر زمان نیز می‌تواند وجود داشته باشد. مثلاً اگر یک حلقه دایروی که حامل جریان است را برای یک دوقطبی مغناطیسی نوسانی در نظر بگیریم (شکل ۶-۱۸)، داریم:

$$I(t) = I_0 e^{-i\omega t'} \rightarrow I_0 \cos \omega t' \quad (۶.۸۴)$$

میدان مغناطیسی استاتیکی از یک حلقه جریان توسط ممان مغناطیسی بیان می‌شود:

$$m = \frac{I}{c} \int_S da \rightarrow \frac{I}{c} \pi a^2 e_3 \quad (۶.۸۵)$$

برای بررسی میدان تابشی باید از تقریب  $r \ll \lambda \ll d$  که به میدان تابشی دوقطبی الکتریکی هر تزی اعمال می‌شود، استفاده کرد. رابطه (۶.۸۵) در محدوده  $d = 2a \ll \lambda$  برای یک جریان وابسته به زمان با المان‌های حلقه هم‌فاز می‌شود.



شکل ۶-۱۸. دوقطبی مغناطیسی نوسانی.

برای بدست آوردن میدان‌های تابشی باید جملات  $\partial J/\partial t$  را در روابط میدان‌های تاخیری قرار داد:

$$\begin{cases} E_{rad} = - \int_V \frac{[\frac{\partial J}{\partial t}]}{c^2 R} dv' \\ B_{rad} = - \int_V \frac{[\frac{\partial J}{\partial t}] \times e_R}{c^2 R} dv' \end{cases} \quad (۶.۸۶)$$

با استفاده از  $Jdv' \rightarrow I dl$  داریم:

$$E_{rad} \rightarrow \frac{\omega I_0}{c^2 R} \oint \sin \omega \left( t - \frac{R}{c} \right) dl \quad (۶.۸۷)$$

اگر تقریب  $R \equiv |r - r'| \rightarrow r$  را در آرگومان تابع سینوسی رابطه (۶.۸۷) قرار گیرد، آنگاه نتیجه صفر می‌شود. پس با توجه به اینکه که مبدا در مرکز حلقه قرار دارد و نقطه مشاهده  $P$  بالای محور  $x_1$  قرار دارد (شکل ۶-۱۸)، بنابراین به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} r = r(\sin \theta e_1 + \cos \theta e_3) \\ r' = a(\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2) \end{cases} \quad (۶.۸۸)$$

بنابراین بسط را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$R = (r^2 - 2r \cdot r' + r'^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow r \left( r^2 - \frac{r \cdot r'}{r^2} + \dots \right) \rightarrow r \left( 1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \varphi + \dots \right) \quad (۶.۸۹)$$

$$\sin \left[ \omega \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \rightarrow \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \varphi \right] \rightarrow$$

$$\sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] - \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \left( \frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \varphi \right) \quad (۶.۹۰)$$

$$dl = a d\varphi (-\sin \theta e_1 + \cos \varphi e_2) \quad (۶.۹۱)$$

با ضرب رابطه (۶.۹۰) در (۶.۹۱)، می‌توان میدان الکتریکی دوقطبی مغناطیسی نوسانی را بدست آورد:

$$E_{rad} \rightarrow \frac{\omega I_0}{c^2 r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right] \oint_0^{2\pi} \left( \frac{\omega a}{c} \sin \theta \cos \varphi \right) (a \cos \varphi d\varphi) e_2$$

$$\rightarrow - \frac{\omega I_0 \pi a^2}{c^3 r} \sin \theta e^{-i(kr - \omega t)} e_\varphi \quad (۶.۹۲)$$

همچنین میدان مغناطیسی با استفاده از  $e_R \rightarrow e_r = \sin \theta e_1 + \cos \varphi e_2$  بدست می‌آید. بنابراین انتگرال فقط در یک بردار یکه متفاوت است ( $e_2 \times e_r \rightarrow -\sin \theta e_3 + \cos \theta e_1 \rightarrow e_\theta$ ) و میدان تابشی در جمله‌هایی از ممان مغناطیسی بدست می‌آید:

$$-(E_{rad})_\varphi = (B_{rad})_\varphi = \frac{[\ddot{m}]}{c^2 r} \sin \theta \quad (۶.۹۳)$$

میدان‌ها به صورت لحظه‌ای بر هم عمود هستند و اندازه آنها با هم برابر است. میدان‌های دو قطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی، دو گانه هستند، با جهت بردارهای  $e_\theta$  و  $e_\varphi$  معاوضه می‌شوند و دارای بزرگی یکسانی در  $\sin\theta/r$  هستند. توزیع زاویه‌ای توان تابشی برابر است با:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad}^*) r^2 \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\omega^4 I_0^2 S^2}{8\pi c^5} \sin^2 \theta \quad (۶.۹۴)$$

توان تابشی کل برابر است با:

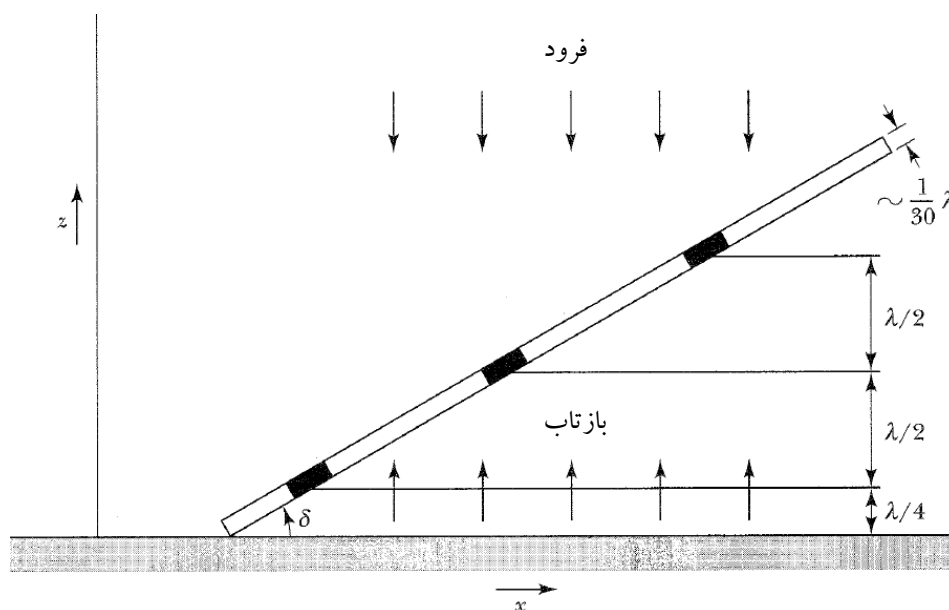
$$\langle P \rangle = \frac{\omega^4 I_0^2 S^2}{3c^5} = \frac{\pi^6 I_0^2}{3c} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^4 \quad (۶.۹۵)$$

## فصل هفتم : تداخل و همدوسی

برهم‌نهی امواج در مکان‌های خاص، باعث تداخل ویرانگر (کاهش) دامنه یا شدت می‌شود یا باعث تداخل سازنده (افزایش) دامنه یا شدت می‌شود. واژه تداخل به معنی برهم‌نهی دو یا تعداد بیشتری از امواج می‌گردد اما واژه پراش به معنی برهم‌نهی پیوستاری از مولفه‌های بی‌نهایت کوچک است.

### ۷-۱. آزمایش وینر (wiener) و بردار نور

آزمایش وینر (شکل ۷-۱) اثبات کرد که اثرات نوری بجای بردار مغناطیسی توسط بردار الکتریکی موج الکترومغناطیسی ایجاد خواهند شد. در اینجا یک نور تک رنگ ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ )، عمود به یک سطح منعکس کننده قوی، فرود می‌آید. یک آشکارساز به شکل فیلم شفاف و با ضخامت  $\lambda/30$ ، بالای سطح منعکس کننده قرار می‌گیرد و یک زاویه کوچک  $\delta$  با سطح می‌سازد. بعد از تابش، فیلم فوتوگرافی در فواصل یکسان، سیاه می‌شود. چون  $\delta$  کوچک است، فاصله عمودی از سطح منعکس کننده تا فیلم، با فاکتور  $1/\sin\delta \approx 1/\delta$  ضرب می‌شود طوری که فاصله بین نوارهای سیاه شده، قابل مشاهده و قابل اندازه‌گیری است. نوارهای سیاه شده معادل بانواحی ای هستند که در آن بردار نور به خاطر تداخل سازنده، زیاد می‌شود. اولین نوار سیاه در فاصله  $\lambda/4$  بالای سطح اتفاق می‌افتد و نوارهای پشت هم، فاصله  $\lambda/2$  دارند.



شکل ۷-۱. آزمایش وینر (wiener).

اگر  $E_0$  بردار الکتریکی فرودی و قطبیده شده در جهت  $x$  باشد و  $E_1$  بردار الکتریکی منعکس شده باشد، داریم:

$$\begin{cases} E_0 = e_x E_0^0 e^{i(-kz-\omega t)} \\ E_1 = -e_x E_0^0 e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \quad (7.1)$$

علامت منفی در  $E_1$  به دلیل وجود تغییر فاز  $\pi$  (تحت بازتاب) اتفاق می‌افتد. بردار الکتریکی کل برابر است با:

$$E = E_0 + E_1 = e_x E_0^0 (e^{-ikz} - e^{ikz})e^{-i\omega t} \quad (۷.۲)$$

بخش حقیقی نیز برابر است با :

$$\text{Re}(E) = 2 E_0^0 \sin(kz)\sin\omega t \quad (۷.۳)$$

این یک موج ایستاده است با گره‌ها و شکم‌هایی به صورت زیر :

$$\begin{cases} z = m \frac{\lambda}{2} & m = 0, 1, 2, \dots & \text{گره} \\ z = n \frac{\lambda}{2} & m = \frac{0}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots & \text{شکم} \end{cases} \quad (۷.۴)$$

وینر هیچ سیاه‌شدگی در مکان گره‌ها و در فیلم پیدا نکرد و در مکان شکم یک ماکزیمم سیاه‌شدگی پیدا کرد. یک آنالیز مشابه برای حالت بردار مغناطیسی B آشکار کرد که گره‌ها و شکم‌های B با گره‌ها و شکم‌های E جابجا شده‌اند. بنابراین سیاه‌شدگی فیلم در شکم E اتفاق می‌افتد، گره در شکم B اتفاق می‌افتد. بنابراین بخش فعال نوری موج نوری، بردار الکتریکی است.

## ۲-۷. شدت‌های همدوس و ناهمدوس

به عنوان یک مثال از تداخل، می‌توان برهم‌نهی دو موج تک رنگ را بررسی کرد :

$$\begin{cases} E_1 = e_x E_1^0 e^{i(kz - \omega t + \phi_1)} \\ E_2 = e_x E_2^0 e^{i(kz - \omega t + \phi_2)} \end{cases} \quad (۷.۵)$$

هر دو موج در جهت z حرکت می‌کنند و در جهت x قطبیده شده‌اند. آنها فرکانس یکسان دارند اما فازهایشان  $\phi_1$  و  $\phi_2$  است. بردار الکتریکی کل برابر با  $E = E_1 + E_2$  می‌باشد. شدت (بردار پوئین تینگ متوسط) این ترکیب برابر است با :

$$I = \frac{c}{4\pi} \langle |\text{Re } E|^2 \rangle = \frac{c}{8\pi} E \cdot E^* = \frac{c}{8\pi} \{ |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1 \cdot E_2^* + E_1^* \cdot E_2 \} \quad (۷.۶)$$

بنابراین داریم :

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{c}{8\pi} |E_1|^2 \\ I_2 = \frac{c}{8\pi} |E_2|^2 \\ I_{12} = \frac{c}{8\pi} (E_1 \cdot E_2^* + E_1^* \cdot E_2) \end{cases} \quad (۷.۷)$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{c}{8\pi} (E_1^0)^2 \\ I_2 = \frac{c}{8\pi} (E_2^0)^2 \\ I_{12} = \frac{c}{8\pi} E_1^0 E_2^{*0} (e^{i\Delta\phi} + e^{-i\Delta\phi}) = \frac{c}{4\pi} E_1^0 E_2^0 \cos\Delta\phi \end{cases} \rightarrow I = I_1 + I_2 + \sqrt{2I_1 I_2} \cos\Delta\phi \quad (۷.۸)$$

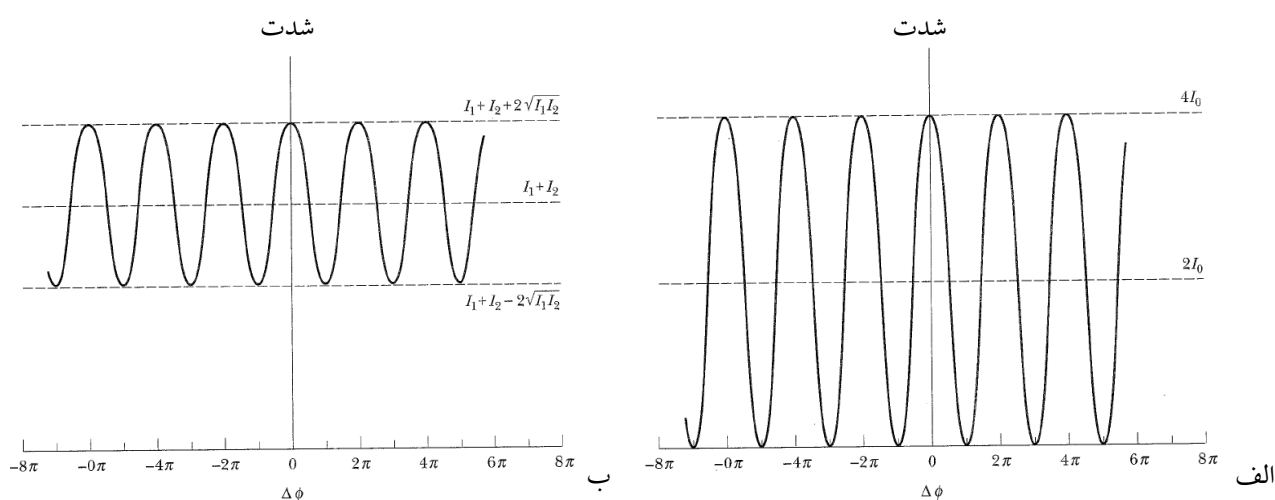
همچنین شدت‌های مینیمم و ماکزیمم برابرند با :

$$\begin{cases} I_{min} = I_1 + I_2 - \sqrt{2I_1I_2} & \Delta\phi = 0, \pm 2\pi, 4\pi, \dots \\ I_{max} = I_1 + I_2 + \sqrt{2I_1I_2} & \Delta\phi = 0, \pm 3\pi, 5\pi, \dots \end{cases} \quad (7.9)$$

اگر  $I_0 = I_1 = I_2$  باشد، داریم:

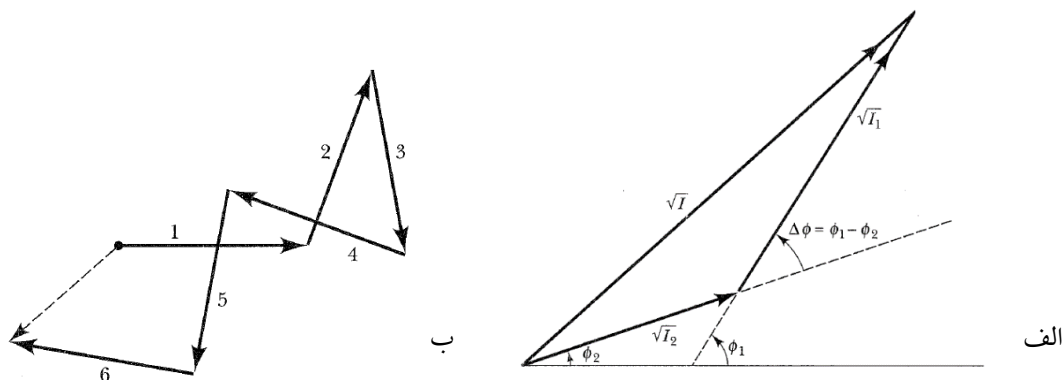
$$I = 2I_0(1 + \cos\Delta\phi) = 2I_0 \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} \quad (7.10)$$

بنابراین ماکزیمم شدت برای شدت‌های برابر دو پرتو، متوجه هست ( $4I_0$  و مینیمم، صفر است). مطابق شکل ۷-۲ الف، طرح شدت به صورت تابعی از اختلاف فاز می‌باشد. اگر شدت‌های  $I_1$  و  $I_2$  برابر نباشند، شدت بدست آمده در حوالی  $I_1 + I_2$  نوسان می‌کند و هرگز به بزرگی  $2(I_1 + I_2)$  و یا صفر نمی‌رسد (شکل ۷-۲ ب).



شکل ۷-۲. الف. تداخل دامنه‌های مساوی. ب. تداخل دامنه‌های نامساوی.

در ترکیب این دو سیگنال نوسانی، طول هر بردار متناسب با دامنه امواج و متناسب با جذر میانگین شدت آن است. جهت بردار، نمایشگر فاز آن است و مربع بزرگی نتیجه شدت برهم‌نهی را بدست می‌آورد (شکل ۷-۳ الف). بنابراین توان حمل شده توسط امواج برهم‌نهی شده می‌تواند بین صفر و  $4I_0$  باشد.



شکل ۷-۳. الف. ساخت فازور برای افزودن دو موج. ب. دیاگرام فازی برای  $N = 6$ .



برای رفع این عدم بقا انرژی باید این نکته را مورد بررسی قرار داد که مدل موج تخت نامتناهی فقط به صورت موضعی معتبر است. همه تغییر فازهای  $\Delta\phi$  ممکن در مکان‌های مختلف در سیستم وجود دارد دارند و شدت متوسط گیری شده روی  $\Delta\phi$ ، دقیقاً جمع غیر همبسته  $I_0 \rightarrow I_1 + I_2$  می‌باشد. حال با بررسی برهم‌نهی  $N$  موج با دامنه‌ها و فازهای مشخص (با فرکانس برابر) و با توجه به اینکه امواج تخت نیستند و در یک جهت منتشر نمی‌شوند، می‌توان میدان الکتریکی کل را در یک نقطه خاص بدست آورد:

$$E = \sum_{r=1} E_r \quad (۷.۱۱)$$

اگر همه امواج مولفه‌ای یک رابطه فازی تعریف شده، با یکدیگر داشته باشند (همدوس باشند)، سپس در این نقطه، میدان کل در فرکانس  $\omega$  با دامنه ثابت نوسان خواهد کرد که می‌تواند از جمع برداری نمایش فازی میدان‌ها بدست بیاید. دامنه ماکزیم در حالت خاص اتفاق می‌افتد که همه میدان‌ها هم‌فازند و دامنه مینیمم، صفر خواهد شد (مگر اینکه یک مولفه آنقدر بزرگ باشد که نتواند توسط برهم‌نهی سازنده بقیه حذف شوند). با فرض دامنه‌های یکسان  $E_r \rightarrow E_0$ ، برای همه  $r$  ها داریم:

$$\begin{cases} |E_{max}| = \sum_{r=1} |E_r| \rightarrow NE_0 \\ I_{max} = \frac{c}{8\pi} (NE_0)^2 = N^2 I_0 \end{cases} \quad \text{تداخل سازنده} \quad (۷.۱۲)$$

اگر میدان‌ها دارای فرم خاص  $E_r = e_x E_0 e^{i(\omega t - \phi_r)}$  باشند، آنگاه دارای قطبش و دامنه یکسان هستند اما ممکن است فازهایشان با هم متفاوت باشد. بنابراین شدت برابر است با:

$$I = \frac{c}{8\pi} E E^* = \frac{c}{4\pi} (E_0)^2 \left| \sum_{r=1}^N e^{i\Delta\phi} \right|^2 = \frac{c}{4\pi} (E_0)^2 \left( \left( \sum_r \cos\phi_r \right)^2 + \left( \sum_r \sin\phi_r \right)^2 \right) =$$

$$\frac{c}{4\pi} (E_0)^2 (\sum_r \cos^2\phi_r + \sum_r \sum_s \cos\phi_r \cos\phi_r + \sum_r \sin^2\phi_r + \sum_r \sum_s \sin\phi_r \sin\phi_r) \quad (۷.۱۳)$$

اگر همه فازها یکسان باشند، رابطه  $I_{max} = N^2 I_0$  باز تولید می‌شود. اما اگر فازها غیر همبسته باشند، مولفه‌ها غیر همدوس باشند و  $N$  بزرگ باشد آنگاه رابطه (۷.۱۳) به صورت زیر نوشته می‌شود (جملات دوم و سوم به عنوان سهم‌های مثبت و منفی، همدیگر را حذف می‌کنند):

$$I = \frac{c}{4\pi} (E_0)^2 (\sum_r \cos^2\phi_r + \sum_r \sin^2\phi_r) = \frac{c}{4\pi} (E_0)^2 \sum_r 1 = \frac{c}{4\pi} (E_0)^2 N \quad (۷.۱۴)$$

شدت کل برابر می‌شود با (شدت کل سیگنال‌های ناهمدوس، جمع شدت‌های مجزا است):

$$I \rightarrow \sum_r I_r = N I_0 \quad (۷.۱۵)$$

همچنین یک اختلاف دیگر در حالت همدوس وجود دارد که در آن دامنه و شدت، ثابت است، در حالی که برای  $N$  محدود، حالت غیرهمدوس حول مقدار بدست آمده از رابطه (۷.۱۴) به صورت یک متوسط زمانی، نوسان می‌کند.

هنگامی که میدان‌ها ناهمدوس باشند و فازها غیرهمبسته باشند، آنگاه فازها با یکدیگر رابطه ثابت ندارند. در  $N < \infty$ ، فازها در زمان تغییر می‌کنند. نوسان‌های نسبی برای  $N$  کوچک، بزرگ است و با افزایش  $N$ ، کاهش می‌یابد. مطابق شکل ۷-۳، برای یک دیاگرام فازی برای جمع  $N$  سیگنال همدوس با دامنه یکسان، بردارها بزرگی یکسان دارند اما جهت‌گیری‌شان (فازها) به طور رندوم می‌باشد. مقدار متوسط آماری  $\sqrt{N}$  برابر یک گام واحد است. بنابراین با برهم‌نهی سیگنال‌های همدوس، ابتدا دامنه‌هایشان جمع می‌شود و سپس مربع نتیجه شدت کل را می‌دهد که می‌تواند بزرگتر یا کوچکتر از جمع شدت‌های مجزا باشد. هنگامی که سیگنال‌های ناهمدوس برهم‌نهی کنند، شدت‌های مجزای آنها برای رسیدن به شدت کل باید جمع شود.

### ۷-۳. تابش تک رنگ

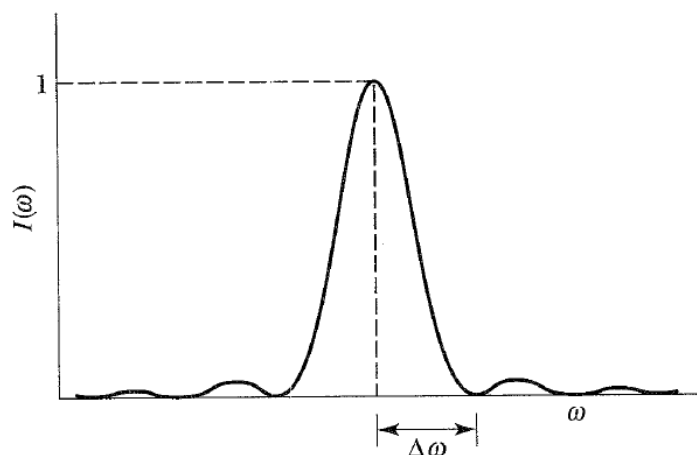
یک موج در همدوسی باید تک فرکانس باشد و در همه زمان‌ها وجود داشته باشد (نوسانی که تبدیل فوریه‌اش یک تابع دلتای دیراک است). اگر یک نوسانگر وجود داشته باشد که در فرکانس  $\omega_0$  پایدار باشد و برای بازه زمانی متناهی  $2\Delta t$  روشن باشد، آنگاه وابستگی زمانی موج برابر است با:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & -\Delta t \leq t \leq \Delta t \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (7.16)$$

توزیع فرکانسی برای تبدیل فوریه  $f(t)$  برابر است با:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{\sin[(\omega-\omega_0)\Delta t]}{(\omega-\omega_0)\Delta t} 2\Delta t \quad (7.17)$$

طیف توان که توزیع فرکانسی شدت موج است، متناسب با مربع تابع توزیع دامنه  $I(\omega) \propto |F(\omega)|^2$  است. مطابق با شکل ۷-۴، برای طیف شدت نسبی، قطار موج متناهی یک محدوده فرکانسی دارد (البته فرکانس  $\omega_0$  در طول زمان روشن بودن، ثابت است). ۹۰ درصد توان کل در پیک مرکزی قرار دارد و اندازه نیم پهنای  $\Delta\omega$  این طیف، یک باند از  $\omega_0$  تا اولین گره است، یعنی:  $\Delta\omega = \pi / \Delta t$ .



شکل ۷-۴. طیف شدت نسبی یک قطار موج متناهی.

در نوع دیگر، طول زمانی قطار موج در جملاتی از تعداد سیکل بیان می‌شود ( $N = (2\Delta t)/\tau$ ). همچنین پریود نوسان برابر با  $\tau = 2\pi/\omega$  می‌باشد. بنابراین نیم پهنای کسری طیف برابر با  $\Delta\omega/\omega_0 = 1/N$  می‌باشد. یعنی پهنای باند فرکانسی  $2\Delta\omega$  و طول زمانی  $2\Delta t$  قطار موج مرتبط با رابطه عدم قطعیت می‌باشد و طول زمانی کوتاه‌تر، محدوده فرکانسی را پهن‌تر خواهد کرد. یک موج تک رنگ به طول زمانی نامتناهی، وابسته است. همچنین تغییرات دامنه می‌تواند فرکانس یا فاز را مدوله کند و طیف آن را پهن کند. در یک گاز رقیق، انبساط زیادی به صورت همزمان تابش می‌کنند و شدت کل مجموع غیر همدوسی است. پهنای خط طبیعی با دو اثر زیاد می‌شود:

آ. پهن‌شدگی دوپلری: وقتی اتم‌های تابش‌گر نسبت به اتم‌های مشاهده‌گر، حرکت می‌کنند، یک تغییر فرکانسی اتفاق می‌افتد. اتم‌های گاز یک حرکت حرارتی رندم دارند (با یک توزیع ماکسول - بولتزمنی) و بنابراین طیف مشاهده شده با یک خط گاوسی پهن می‌شود. پهن‌شدگی متناسب با جذر مربع دمای مطلق است و در یک آزمایشگاه با سرد سازی تیوپ تخلیه با استفاده از حمام نیتروژن مایع، می‌تواند کاهش پیدا کند. اندازه گیری پهنای خط می‌تواند برای بدست آوردن دمای گاز گسیل کننده استفاده شود.

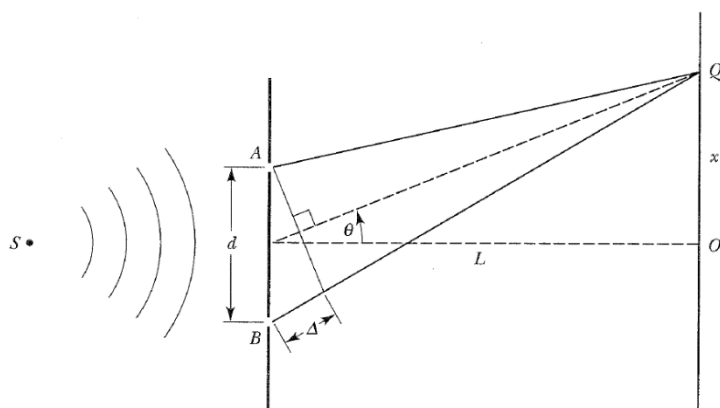
ب. پهن‌شدگی فشاری: اتم‌های گازی با هم برخورد می‌کنند و زمان آزاد متوسط بین برخوردها به صورت معکوس متناسب با فشار گاز است. وقتی زمان برخورد متوسط کوتاه‌تر از زمان تابش طبیعی  $\Delta t$  است، قطع فرآیند تابش خط را پهن می‌کند (با شکل خط لورنتسی). این اثر با کاهش فشار می‌تواند کاهش پیدا کند اما با درخشش، منبع را از دست می‌دهد.

در یک لیزر گازی، انتقال تابشی به جای خود بخودی بودن، واداشته است. گسیل‌های اتمی همزمان می‌شوند و پهنای خط طبیعی کاهش می‌یابد. آینه‌ها در لیزر گازی، انتقال تابشی به جای خود به خودی تحریک می‌شود. انتشارات اتمی هماهنگ شده و پهنای خط طبیعی بسیار کاهش می‌یابد. با این حال، برای دستیابی به لیزر معمولاً به آینه نیاز است. آینه‌ها یک حفره رزونانسی را تشکیل می‌دهند که اتلاف آن محدودیت غالب در تک رنگ بودن تابش است. لیزرهای عملی با بازخورد فعال برای دستیابی به پهنای خط  $\Delta\omega/2\pi = 1 \text{ Hz}$  می‌توانند پایدار شوند. خیلی از منابع، چیزی را تولید می‌کنند که تابش غیرقطبیده نامیده می‌شوند. چون امواج نوری عرضی هستند، این عبارت برای حالتی به کار می‌رود که جهت میدان الکتریکی آنی به صورت رندوم در صفحه عمود بر جهت تابش محرف می‌شود. مولفه در امتداد یک محور عرضی، دامنه‌ای خواهد داشت که نوسان می‌کند. بنا بر این یک پر تو غیرقطبیده نمی‌تواند تک رنگ باشد.

#### ۴-۷. تداخل با تقسیم جبهه موج

اگر یک منبع طیفی گسترده (مانند یک تیوب تخلیه الکتریکی گازی) به صورت آرایه‌ای از منابع نقطه‌ای غیرهمدوس، وجود داشته باشد، آنگاه سیگنال‌هایشان تداخل نمی‌کنند و شدت‌ها به صورت مستقیم جمع می‌شوند. همچنین طبق اصل هوینگس، هر المان از جبهه موج گسیل شده توسط یکی از منابع نقطه‌ای اصلی می‌تواند به صورت یک منبع نقطه‌ای ثانویه

در نظر گرفته شود. پوش موج گسیل شده توسط این منابع ثانویه، جبهه موج در زمان بعدی را بدست می آورد. مطابق شکل ۷-۵، یک منبع نقطه‌ای  $S$  در چیدمان آزمایش دوشکاف یانگ می تواند یک پرده را که دارای دو سوراخ کوچک است، روشن کند. فاصله بین سوراخ‌های  $A$  و  $B$  برابر با  $d$  است. اگر فاصله دو سوراخ تا منبع، برابر باشد بنابراین دو سوراخ روی یک جبهه موج قرار می گیرند و اصل هوینگس برای در نظر گرفتن حفره‌ها به صورت تابش گره‌های همدوس در فضای سمت راست صفحه مورد استفاده قرار می گیرد. همچنین طرح تداخل روی پرده مشاهده در  $Q$  قرار می گیرد.



شکل ۷-۵. آزمایش دوشکاف یانگ.

اگر اختلاف راه  $\Delta$ ، مضرب صحیحی از طول موج باشد آنگاه شدت در فاصله  $x$  از محور، ماکزیمم است و اگر اختلاف راه  $\Delta$ ، عدد فردی از نیم طول موج باشد، آنگاه آنگاه شدت در فاصله  $x$  از محور، یک مینیمم ویرانگر است. اختلاف فاز بین دو سیگنال در صفحه دیاگرام (در فاصله مشاهده  $x$ ) برابر است با:

$$\Delta\phi = k\Delta = kd\sin\theta \equiv kd\frac{x}{L} = \frac{2\pi xd}{\lambda L} \quad (7.18)$$

بنابراین توزیع شدت برای نور تک رنگ و روزنه‌های با اندازه یکسان، برابر است با:

$$I(x) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi xd}{\lambda L}\right) \quad (7.19)$$

همچنین شدت‌های اکسترمم در مکان‌های زیر اتفاق می افتد:

$$\begin{cases} x = \frac{m\lambda L}{d} & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots & \text{ماکزیمم} \\ x = \frac{m\lambda L}{d} & m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots & \text{مینیمم} \end{cases} \quad (7.20)$$

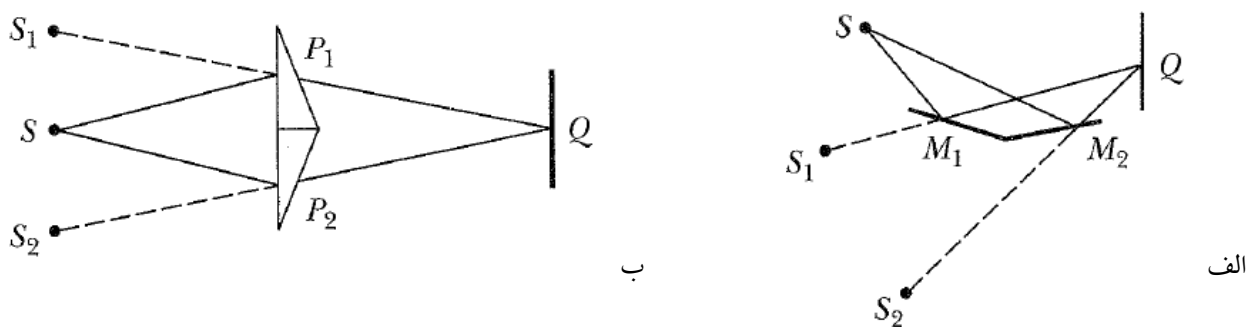
در این دو صفحه، فرآیندهای تداخلی تاریک و روشن متناوب (با فرآیند روشن در  $x = 0$ ) اتفاق می افتد. تناوب فرآیند در صفحه برابر با  $\Delta x = \lambda L/d$  می باشد. در حالت عملیاتی، یک منبع خطی عمود بر شکل، جانشین می شود (یک آرایه خطی از منابع نقطه‌ای ناهمدوس) و شکاف‌های خطی باریک در  $A$  و  $B$  قرار می گیرد. در این صورت هیچ اثر تداخلی در جهت عمود بر شکل وجود ندارد. طرح داخلی در صفحه مشاهده شامل نوارهای موازی است و شدت آن در جهت  $x$

تغییر می کند. شدت مطلق فرانتز تداخلي خیلی بزرگتر است زیرا منبع و روزنه ها در یک بعد، بی نهایت کوچک است. اگر تابش تک رنگ نباشد، فرانتزهای مراتب بالاتر، تار می شوند. دو روش برای تولید فرانتز تداخلي توسط تقسیم جبهه موج را می توان به صورت زیر توصیف کرد:

\_ آینه های فرنل: انعکاس نور از دو آینه که با یک زاویه کوچک، نسبت به هم شیب دارند.

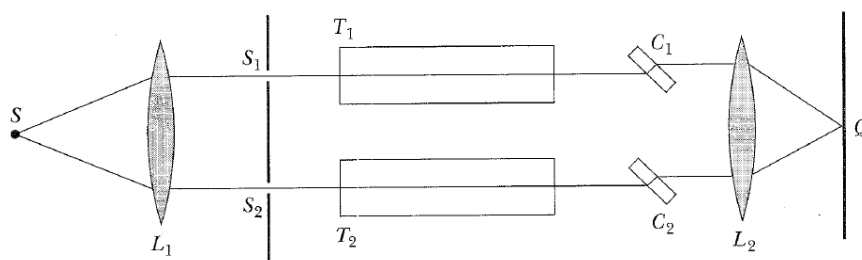
\_ دو منشور فرنل: عبور نور از دو منشور با زاویه کوچک.

در هر دو روش، نوری که به نقطه  $Q$  روی صفحه مشاهده می رسد، از دو منبع  $S_1$  و  $S_2$  می آید و هر کدام از آنها تصویر مجازی منبع واقعی  $S$  هستند (شکل ۶-۷).



شکل ۶\_۷. الف. آینه فرنل. ب. دو منشور فرنل.

مطابق شکل ۷-۷، می توان برای اندازه گیری دقیق ضریب شکست گازها و مایعات از روش تقسیم جبهه موج استفاده کرد. سیستم برای تولید فرانتز در  $Q$  توسط بازترکیب دو پرتو که از داخل سلول های یکسان  $T_1$  و  $T_2$  عبور کرده اند، استفاده می کند. یک سول تخلیه شده است و سلول دیگر شامل گاز است. اختلاف در طول راه نوری می تواند توسط مشاهده فرانتز در  $Q$  مشخص شود. در ابتدا، دو سلول تخلیه می شوند و یک منبع تک رنگ در  $S$  قرار می گیرد. لنز جمع کننده  $L_1$  یک پرتو موازی از نور می سازد که توسط روزنه های  $S_1$  و  $S_2$  به دو پرتو تقسیم می شود. پرتوها از داخل سلول ها عبور می کنند، از صفحات جبران ساز  $C_1$  و  $C_2$  عبور می کنند و سپس توسط لنز  $L_2$  در  $Q$  بازترکیب می شوند. همچنین می توان با چرخش صفحات جبران ساز  $C_1$  و  $C_2$ ، طول راه نوری را کاهش یا افزایش داد.

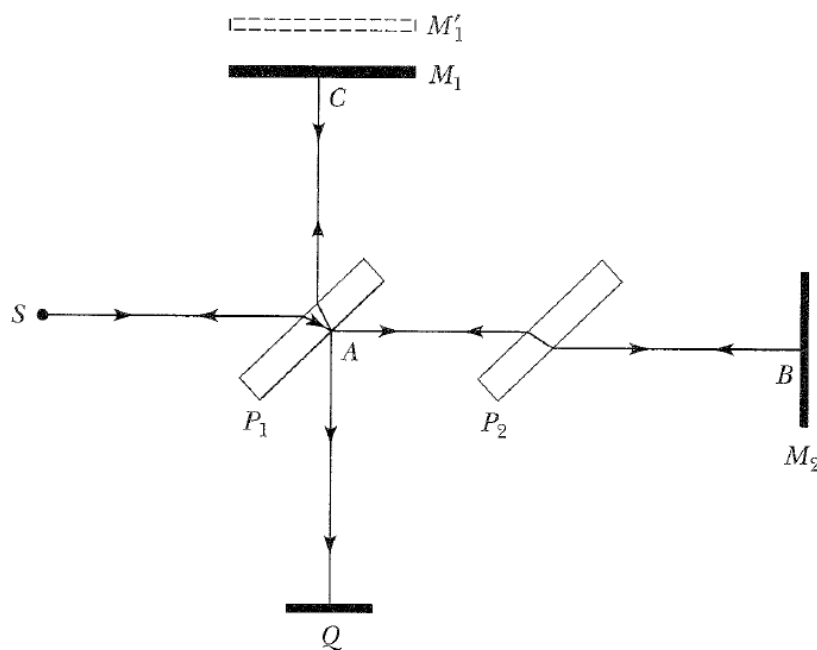


شکل ۷\_۷. اندازه گیری ضریب شکست.

زاویه چرخش با تغییر مشاهده شده از فرانتز توسط نور تک رنگ، کالیبره می‌شود. اندازه‌گیری واقعی توسط نور سفید انجام می‌شود و فقط فرانتز مرکزی در  $Q$  قابل مشاهده است. گاز داخل یک سلول قرار می‌گیرد و صفحات جبران‌ساز تنظیم می‌شوند تا فرانتزهای نور سفید را دوباره در  $Q$  متمرکز کنند. اختلاف در افزایش طول راه نوری که توسط صفحات جبران‌ساز ایجاد می‌شود باید برابر با اختلاف راه نوری در سلول‌های عبوری باشد. با اندازه‌گیری طول سلول، دما و فشار گاز می‌توان ضریب شکست را محاسبه کرد.

### ۵-۷. تداخل با تقسیم دامنه

روش دیگر تولید تداخل بر اساس تقسیم دامنه یک پرتو، استفاده از انعکاس جزئی است. مثل حالت انعکاس رنگی از یک فیلم صابون یا یک فیلم روغن روی سطح آب که می‌توان آن را در آزمایشگاه با قرار دادن یک فیلم نازک با رسانایی بالا (نقره یا آلومینیوم) روی زیر لایه شیشه ساخت. پرتو فروری به دو پرتو عبور و بازتاب تقسیم می‌شود (و البته یک جذب کوچک در فیلم فلزی اتفاق می‌افتد). یعنی دو پرتو هم‌درس با شدت مساوی تولید می‌شود. این پرتوها دوباره می‌توانند با استفاده از آرایه آینه‌ها با هم ترکیب شوند و تداخل ایجاد خواهد شد. درجه تداخل اختلاف راه نوری که دو پرتو قبل از باز ترکیب پیموده‌اند، وابسته است. مطابق شکل ۸-۷، می‌توان تداخل سنج مایکلسون را بر اساس اصل تقسیم دامنه بررسی کرد. پرتو نور در منبع  $S$  سر چشمه می‌گیرد و به سمت تیغه مبله شیشه‌ای می‌رود. سطح  $P_1$  در جهت مخالف با منبع نقره قرار دارد، به طوری که نصف نور عبور می‌کند و نصف باقی‌مانده نور بازتاب می‌کند. نور منعکس شده از نقطه  $A$  تا  $C$  می‌رود. در نقطه  $C$  از آینه  $M_1$  بازتاب می‌شود و به  $P_1$  بازتاب می‌شود و به سمت تیغه مبله شیشه‌ای می‌رود. بخشی از این پرتو توسط  $P_1$  عبور می‌کند و به سمت آشکارساز در  $Q$  می‌رود. منبعی از پرتو اصلی توسط  $P_1$  عبور داده می‌شود و مسیر  $ABAQ$  را طی می‌کند. تداخل دو پرتو در  $Q$  قابل مشاهده است.



شکل ۸-۷. تداخل سنج مایکلسون.

پرتوی که مسیر SACAQ را طی می کند، سه بار از داخل  $P_1$  عبور می کند. اما پرتوی که مسیر SABAQ را طی می کند یک بار از داخل  $P_1$  عبور می کند. یک تیغه جبران کننده بدون پوشش نقره ( $P_2$ ) که ضخامت برابر با  $P_1$  دارد، برای تصحیح پاشندگی شیشه، در مسیر پرتو دوم قرار می گیرد. اگر دو آینه  $M_1$  و  $M_2$  دارای فاصله یکسان تا نقطه A داشته باشند، هر دو پرتو فاصله یکسانی را قبل از رسیدن به Q طی می کنند. همچنین دو پرتو دو بازتاب را تجربه کرده اند و تغییر فاز یکسانی دارند. بنابراین در Q پرتوها هم فازند و تداخل سازنده وجود دارد. اگر آینه  $M_2$  ثابت شود،  $M_1$  می تواند در جهت عمود به سطح حرکت کند. با جابجایی  $M_1$ ، طول راه توسط SACAQ تغییر می کند. اگر اختلاف فاز مضرب صحیحی از  $2\pi$  باشد، یک نقطه روشن در Q قابل مشاهده خواهد شد. طول موج تابش تک رنگ می تواند توسط حرکت  $M_1$  (به اندازه یک فاصله مشخص) و شمردن تعداد زمانهایی که نقاط روشن در طول حرکت ظاهر می شود، تعیین گردد. تصویر آینه  $M_2$  (که توسط نیم آینه  $P_1$  بازتاب شده است) تقریباً با آینه واقعی  $M_1$  برهم نهی می کند. فاصله  $d$  با تنظیم مکان  $M_1$ ، تغییر می کند. بنابراین شرط تداخل برابر می شود با:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(2d) \rightarrow 2d = m\lambda \quad (۷.۲۱)$$

هنگامی تداخل سازنده است که  $m$  یک عدد صحیح باشد و هنگامی تداخل ویرانگر است که  $m$  نصف یک عدد صحیح باشد. اگر چشم انسان در مکان Q قرار گیرد، یک میدان دید خواهد داشت که توسط سایز آینه ها مشخص می شود. یک محور به صورت عمود بر  $M_1$  و تصویر  $M_2$  در نظر گرفته می شود. یک پرتو با زاویه  $\theta$  از دو آینه منعکس می شود و اختلاف راه بین آینه ها به جای  $2d$  برابر با  $2d\cos\theta$  خواهد بود:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(2d\cos\theta) \rightarrow 2d\cos\theta = m\lambda \quad (۷.۲۲)$$

چون محدوده  $\theta$  قابل مشاهده، به مقادیر کوچک محدود است بنابراین  $\cos\theta$  خیلی نزدیک به یک، باقی می ماند و طرح برای  $\theta$  مختلف، شبیه یک سری دایره های تاریک و روشن متحد المکز قابل مشاهده خواهد بود. هنگامی که آینه  $M_1$  حرکت می کند (طوری که از آینه  $M_2$  دور می شود)، طرح دایره های متحد المکز به سمت بیرون حرکت می کند و همواره یک فرانتز جدید در مرکز ایجاد شده و باز می شود. اگر آینه  $M_1$  کمی بچرخد به طوری که دو آینه یک گوشه را با هم تشکیل دهند، طرح فرانتزها دارای خطوط موازی است که هنگامی که  $d$  تغییر کند، در یک طرف حرکت می کنند.

## ۶-۷. طول همدوسی و زمان همدوسی

پایداری فاز موج در زمان و مکان، و توانایی یک نوسان برای تولید تداخل قابل مشاهده با یک نمونه تاخیری از خودش، به عنوان دو تعریف از همدوسی شناخته می شوند. یک موج تک رنگ ایده آل می تواند به دو مولفه یا بیشتر تقسیم شود (تقسیم جبهه موج یا تقسیم دامنه موج). سپس مولفه ها با اختلاف فاز  $\Delta\phi$  بین خودشان در یک نقطه داده شده با یکدیگر تداخل می کنند. یعنی یک مولفه نسبت به دیگری به اندازه زمان  $\tau = \Delta\phi/\omega$  تاخیر دارد. محدوده شرط تداخل سازنده دو ویرانگر توسط تنظیم زمان تاخیر  $\tau$ ، پوشش داده می شود. حال اگر موج تک رنگ ایده آل با یک مدل واقعی گسیل

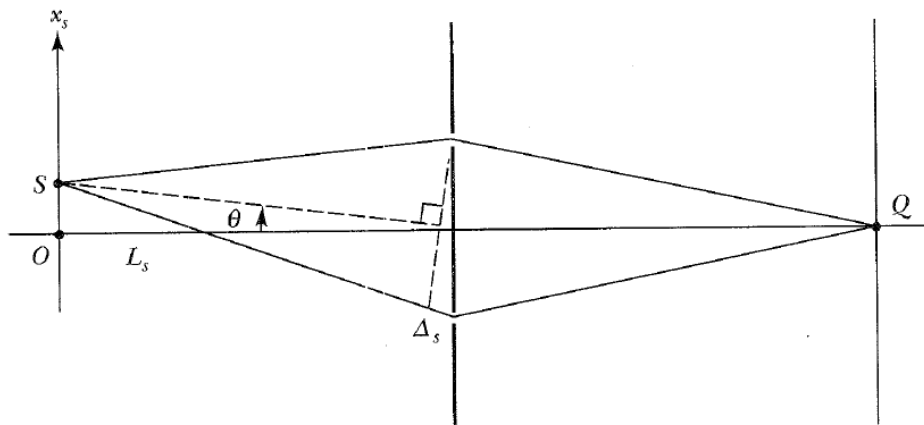
از تخلیه الکتریکی گازی (که شامل برهم‌نهی قطارهای موج متناهی است) جایگزین شود، آنگاه فرکانس  $\omega_0$  و طول مدت  $25t$  برای هر مولفه از پرتو، یکسان است. نقطه شروع رندوم است و فازهای نوسان یک قطار موج غیرهمبسته است. اگر دوباره پرتو به دو پرتو تقسیم شود و بخش‌ها با یک بخش تأخیری به اندازه  $\tau$  ترکیب شود، آنگاه تداخل خوبی بدست می‌آید اگر  $25t \ll \tau$  باشد. چون هر مولفه قادر به تداخل با خودش است. اما هنگامی می‌توان گفت که تداخل وجود ندارد اگر  $25t \gg \tau$  باشد. یعنی شدت مولفه‌های باز ترکیب شده، مستقل از  $\tau$  است. بنابراین مدل قطار موج یک موج تقریباً تک رنگ، یک زمان همدوسی  $\tau_c$  دارد که از مرتبه  $\Delta t$  است و هر سیگنال تقریباً تک رنگ با پهنای طبیعی  $\Delta\omega$ ، یک زمان همدوسی  $\tau_c \sim 1/\Delta\omega$  دارد. همچنین طول همدوسی بر حسب زمانی برابر با  $l_{lc} = c\tau_c \sim c/\Delta\omega$  می‌باشد و بر حسب طول موج برابر با  $l_{lc} = \lambda^2/\Delta\lambda$  می‌باشد. در کنار بررسی همدوسی یک قطار موج در جهت انتشار می‌توان همدوسی نقاط مختلف روی جبهه موج در جهت عرضی انتشار را نیز بررسی کرد. البته باید بجای طیف فرکانسی منبع از وسعت فضایی منبع استفاده کرد. برای بررسی این موضوع می‌توان از دو شکاف یانگ استفاده کرد. مطابق شکل ۷-۹، یک منبع نقطه‌ای  $S$  وجود دارد که فاصله‌اش از محور تقارن برابر با  $x_s$  می‌باشد. برای بررسی شرایط تداخل در نقطه  $Q$  که روی محور ثابت است، می‌توان دو حالت خاص را مقایسه کرد:

— یک منبع  $S_1$  روی محور  $(x_s)_1 = 0$  قرار می‌گیرد و یک فرانتز روشن در  $Q$  ایجاد می‌کند.

— یک منبع  $S_2$  جابجا می‌شود تا راه اضافی  $\Delta S$ ، یک نیم طول موج باشد و یک گره در  $Q$  ایجاد شود.

بنابراین داریم:

$$\frac{\lambda}{2} \equiv (\Delta_s)_2 \approx d \sin(\theta_s)_2 \approx d \frac{(x_s)_2}{L_s} \rightarrow (x_s)_2 \approx \frac{\lambda L_s}{2d} \quad (۷.۲۳)$$



شکل ۷-۹. دو شکاف یانگ با منبع جابجاپذیر.

اگر این دو منبع دچار برهم‌نهی (تابش ناهمدوس) شوند، آنگاه ماکزیمم تداخل یکی روی گره دیگری (در نقطه  $Q$ ) می‌افتد، کل فرانتز یکی با دیگری درهم آمیخته می‌شود و فرانتزهای یکی با دیگری درهم آمیخته می‌شود و فرانتزهای تداخلی از بین می‌رود. با بسط این موضوع می‌توان شرایطی که باعث محو شدن فرانتزهای تداخلی توسط یک منبع گستره



غیرهمدوس با پهنای  $\Delta x_s = 2\Delta x_s = (\lambda L_s)/d$  می شود را بدست آورد. پهنای منبع باید کوچک تر از  $(\lambda L_s)/d$  باشد تا فرانتز تداخلی وجود داشته باشد. بنابراین فاصله  $d$  شکاف ها برای یک پهنای منبع  $\Delta x_s$  باید کمتر از  $(\lambda L_s)/\Delta x_s$  باشد. در این صورت جبهه موج تولید شده توسط یک منبع گسترده با پهنای  $\Delta x_s$ ، دارای طول همدوسی عرضی زیر می باشد:

$$\ell_{tc} \sim \frac{\lambda L_s}{\Delta x_s} = \frac{\lambda}{\Delta \theta_s} \quad (\text{پهنای زاویه ای منبع} = \Delta \theta_s) \quad (7.24)$$

$\Delta \theta_s$  برای اندازه همدوسی فضایی تابش از یک منبع به کار می رود اما  $\ell_{tc}$  برای اندازه گیری همدوس زمانی به کار می رود. بنابراین اطراف یک نقطه در میدان تابشی، یک حجم همدوسی به صورت زیر وجود دارد:

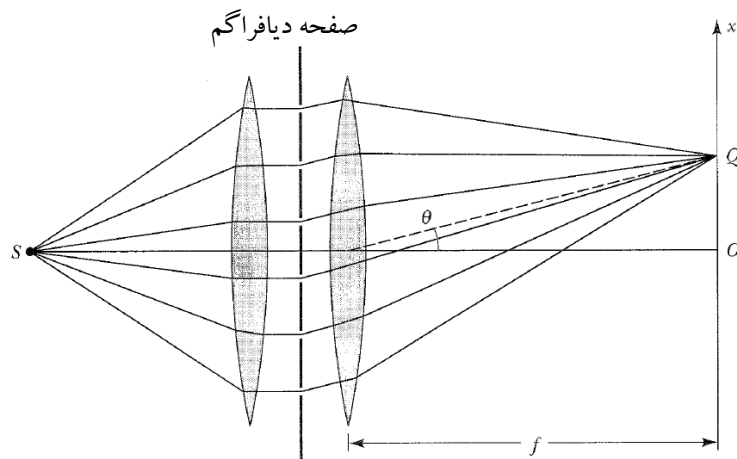
$$\ell_{tc}^2 \ell_{lc} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta \theta_s \Delta \lambda} \quad (\text{پهنای زاویه ای منبع} = \Delta \theta) \quad (7.25)$$

با استفاده از فیلتر زمان و فضا می توان تابش از یک منبع چند رنگ گسترده را همدوس تر کرد. یک فیلتر انتخاب کننده طول موج، می تواند پهنای باند  $\Delta \lambda$  را کاهش دهد و همدوسی طولی  $\ell_{lc}$  را افزایش دهد. فیلتر فضایی به عنوان یک روزنه، اندازه موثر منبع را کم می کند و طول همدوسی عرضی را افزایش می دهد.

## ۷-۷. چند روزنه ای و توری پراش

اگر شدت تداخلی به صورت سینوسی بین ماکزیمم و مینیمم تغییر کند، آنگاه می توان حالت تقسیم جبهه موج را تا طرح تداخلی  $N$  شکافی بدست آورد. مطابق شکل ۷-۱۰، می توان هندسه مورد نظر را توصیف کرد. یک جفت لنز برای تولید جبهه موج تخت فرودی روی سطح شکاف دار و تمرکز پرتوهای خروجی (در همه زوایای  $\theta$  روی نقطه  $Q$  و در مکان  $x$ ) قرار دارد.  $N$  شکاف، پهنای یکسان و فاصله یکسان  $d$  دارند. طول راه های سیگنال های پشت سرهم (از شکاف تا نقطه مشاهده  $x$ ) به اندازه  $\Delta = d \sin \theta$  طولانی تر است که معادل با شیفت فاز  $\Delta \phi = k \Delta$  است. میدان الکتریکی در نقطه  $Q$  برابر است با:

$$E = \sum_{r=1}^N E_r = E_1 (1 + e^{i\Delta\phi} + e^{2i\Delta\phi} + \dots + e^{i(N-1)\Delta\phi}) \quad (7.26)$$



شکل ۷-۱۰. تداخل  $N$  شکاف.

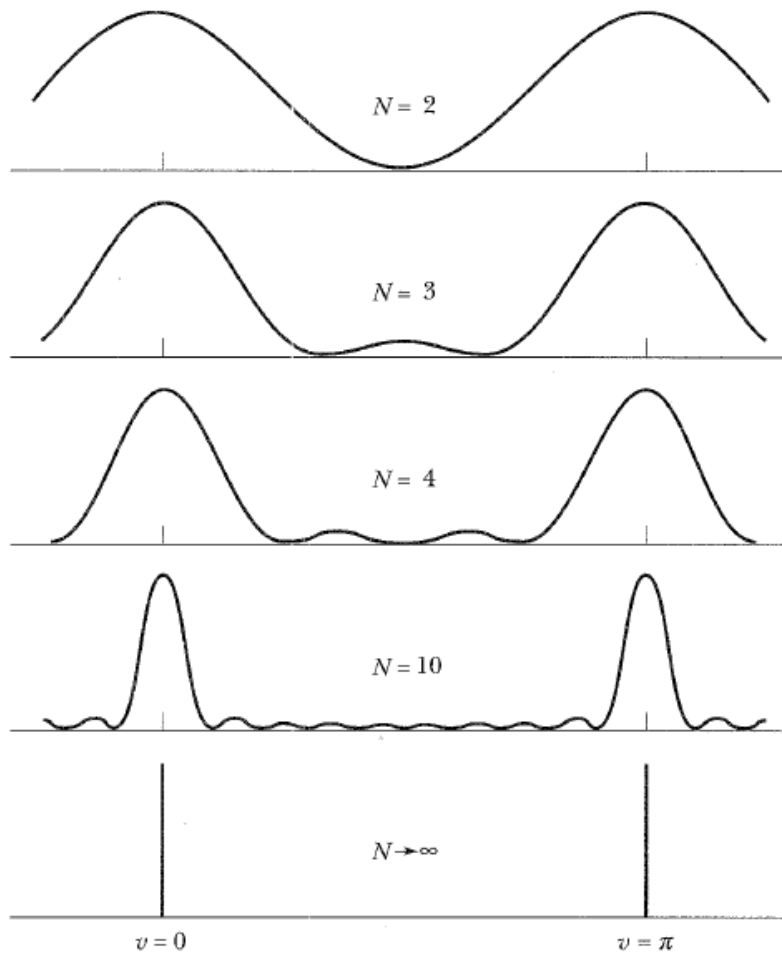
$E_1$  سیگنال رسیده به  $x$  از شکاف اول است. فاکتور بعدی، سری هندسی است که برابر است با:

$$E = E_1 \left( \frac{e^{iN\Delta\phi} - 1}{e^{i\Delta\phi} - 1} \right) = E_1 e^{i(N-1)v} \left( \frac{e^{iNv} - e^{-iNv}}{e^{iv} - e^{-iv}} \right) = E_1 e^{i(N-1)v} \left( \frac{\sin Nv}{\sin v} \right) \quad (۷.۲۷)$$

که در آن از  $v = \Delta\phi/2 = (kd/2)\sin\theta \approx (kd/2)(x/f)$  استفاده شده است.  $f$  طول کانونی لنز خروجی است. بنابراین شدت متناسب با  $|E|^2$ ، برابر است با:

$$I = I_0 \left( \frac{\sin Nv}{N \sin v} \right)^2 \quad (۷.۲۸)$$

چون شکاف‌ها به صورت همدوس، تابش می‌کنند بنابراین  $I_0$ ،  $N^2$  برابر شدت دریافتی از هر شکاف است. مطابق شکل ۷-۱۱، فاکتور تداخلی  $N$  شکاف برابر با  $(\sin Nv / N \sin v)^2$  می‌باشد. اگر  $Nv$  یک عدد صحیح در  $\pi$  باشد آنگاه گره وجود دارد و اگر  $v$  مضرب صحیحی در  $\pi$  باشد آنگاه گره وجود ندارد. شرط دوم، ماکزیمم اصلی را می‌دهد و فاکتور تداخل را به مقدار یک می‌رساند.  $N - 2$  ماکزیمم فرعی بین ماکزیمم‌های اصلی وجود دارد و ماکزیمم‌های فرعی در  $N$  بزرگ، ضعیف و قابل چشم پوشی هستند.



شکل ۷-۱۱. فاکتور تداخلی  $N$  شکاف.

توری پراش در اسپکتروسکوپی نوری بسیار پر کاربرد است و می‌تواند به صورت شکاف در یک صفحه حالت باشد یا به صورت شیارهای موازی در صفحه‌ای شیشه‌ای ایجاد شود. بنابراین فاز موج عبوری می‌تواند به جای دامنه موج عبوری، به صورت دوره‌ای تغییر کند و به صورت یک صفحه بازتابان ساخته شود. معادله توری برای ماکزیمم اصلی برابر با  $v = m\pi$  یا  $d\sin\theta = m\lambda$  است ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) مرتبه تداخل). توری به غیر از مرتبه صفر، طول موج‌های مختلف دیگر را در زوایای متفاوت، پراکنده می‌کند و پاشندگی توری، گستره زاویه‌ای خط طیفی را مشخص می‌کند. با دیفرانسیل‌گیری از  $d\sin\theta = m\lambda$  به رابطه  $d\cos\theta\Delta\theta = m\Delta\lambda$  خواهیم رسید. بنابراین پاشندگی برابر است با:

$$D = \left| \frac{d\theta}{d\lambda} \right| = \frac{|m|}{d\cos\theta} \quad (۷.۲۹)$$

بنابراین اگر زاویه انحراف  $\theta$ ، کوچک باشد آنگاه پاشندگی مستقل از  $\lambda$  خواهد بود. پاشندگی با مرتبه زیاد می‌شود اما چون طیف مراتب بالاتر، همپوشانی می‌کنند بنابراین تشخیص مراتب پراش، سخت می‌شود. برای  $N$  خیلی بزرگ، ماکزیمم اصلی پهنای متناهی دارد و این پهنای می‌تواند مانع از تفکیک پذیری (وضوح) دو خط که خیلی نزدیک هستند، شود. اندازه نیم پهنای خط که جدایی بین ماکزیمم اصلی و اولین گره است، می‌شود. اگر  $N\Delta v = \pi$  باشد آنگاه نیم پهنای زاویه‌ای  $\Delta\theta$  برابر است با:

$$\Delta v = \frac{kd}{2} \cos\theta \Delta\theta = \frac{\pi}{N} \quad (۷.۳۰)$$

در طیف سنجی می‌توان  $\Delta\lambda$  معادل را افزایش داد:

$$\Delta v = \frac{\Delta\theta}{D} = \frac{2\pi}{Nkd\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{|m|} = \frac{\lambda}{|m|N} \quad (۷.۳۱)$$

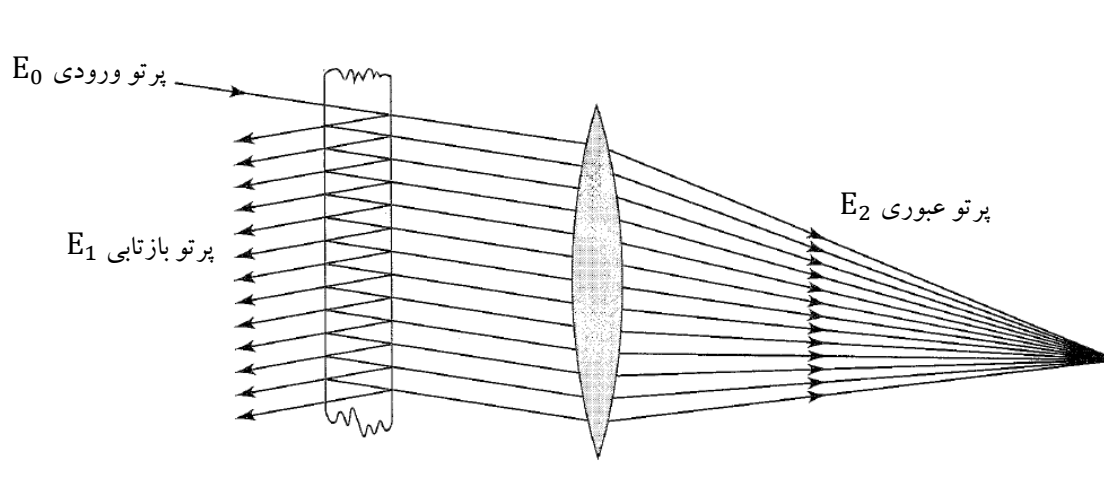
دو خط طیفی با استفاده از اسپکترومتری توری، تفکیک می‌شوند اگر طول موج‌هایشان به اندازه حداقل  $\Delta\lambda$  از هم جدا شده باشند، در غیر این صورت محو شده‌اند. توان تفکیک طیف سنج برابر است با:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = |m|N \quad (۷.۳۲)$$

بنابراین باید از مراتب بالاتر استفاده شود (اما یک محدودیت برای مرتبه وجود دارد). چون  $\sin\theta$  نمی‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد پس  $d/\lambda < m_{max}$  می‌باشد. بنابراین ماکزیمم توان تفکیک برابر با  $R_{max} < Nd/\lambda$  می‌باشد ( $Nd$  برابر با پهنای کل توری است).

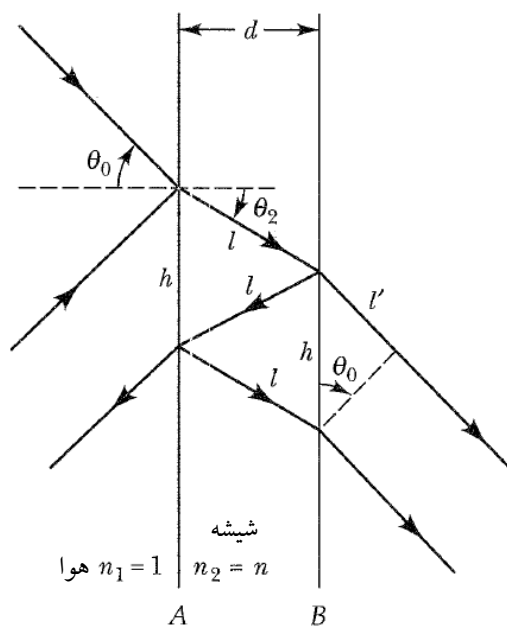
#### ۸-۷. انعکاس‌های چندگانه و تداخل سنج فابری - پرو:

با استفاده از روش تقسیم دامنه در انعکاس‌های جزئی چندگانه (که بین دو صفحه بازتاب‌گر اتفاق می‌افتد) می‌توان اکستریم‌های تداخل را تیز کرد. مطابق شکل ۷-۱۲، نور فرودی در یک تیغه شیشه‌ای (با یک لایه نازک رسانا روی هر دو سطح‌اش) منعکس می‌شود و به صورت جزئی عبور می‌کند، یعنی جذب بسیار کوچک خواهد بود. بنابراین یک پرتو عبوری (با دامنه  $E_2$ ) و یک پرتو انعکاسی (با دامنه  $E_1$ ) بدست می‌آید که شامل تعداد زیادی قسمت‌های همدوس هستند.



شکل ۷-۱۲. انعکاس‌های جزئی چندگانه بین دو صفحه بازتاب‌گر.

مطابق شکل ۷-۱۳، اختلاف فاز بین پرتوهای متوالی به این صورت محاسبه می‌شود که در هر نقطه در امتداد جبهه موج مشترک دو پرتو عبوری، اختلاف در طول راه نوری برابر با  $\Delta = 2nl - l'$  می‌باشد.



شکل ۷-۱۳. پرتوهای بازتاب‌شده و عبوری.

اگر شرایط زیر برقرار باشد:

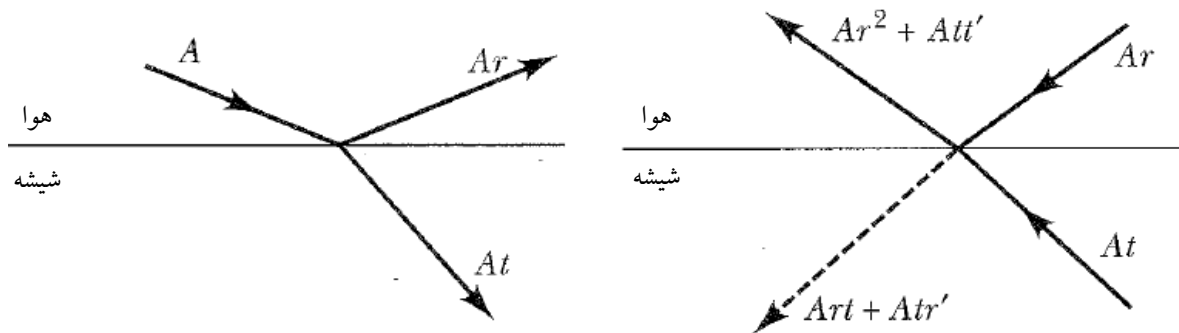
$$\begin{cases} l = \frac{d}{\cos\theta_2} \\ l' = h \sin\theta_0 \\ h = \frac{2d \sin\theta_2}{\cos\theta_2} \\ \sin\theta_0 = n \sin\theta_2 \end{cases} \quad (۷.۳۳)$$

آنگاه داریم :

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos\theta_2} - h \sin\theta_0 = \frac{2nd}{\cos\theta_2} - \left(\frac{2d\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right) (n\sin\theta_2) = 2nd\cos\theta_2 \quad (۷.۳۴)$$

بنابراین اختلاف فاز بین دو پرتو برابر با  $\Delta\phi = k\Delta = (4\pi/\lambda)nd\cos\theta_2$  می‌باشد. دامنه فرودی برابر با  $E_0$  است، دامنه منعکس شده در مرز اول (سطح A) برابر با  $rE_0$  است و دامنه عبوری برابر با  $tE_0$  می‌باشد.  $r$  و  $t$  ضرایب بازتاب و دامنه عبور برای مرز اول هستند و  $r'$  و  $t'$  ضرایب بازتاب و دامنه عبور برای مرز دوم هستند. مطابق شکل ۷-۱۴، اگر پرتو نوری با دامنه A به مرز هوا - شیشه فرود آید آنگاه دامنه انعکاسی برابر با  $Ar$  و دامنه عبوری برابر با  $At$  خواهد بود. مطابق با اصل برگشت پذیری اگر در مرزها، جذب اتفاق نیفتد آنگاه می‌توان پرتوها (با دامنه  $Ar$  و  $At$ ) را معکوس کرد و بردار تشکیل پرتو اولیه با دامنه A، باز ترکیب کرد. دامنه انعکاسی پرتو  $Ar$  برابر با  $Ar^2$  است و دامنه عبوری پرتو  $At$  برابر با  $Att'$  می‌باشد. بنابراین داریم :

$$Ar^2 + Att' = A^2 \quad \Rightarrow \quad tt' = 1 - r^2 \quad (۷.۳۵)$$



شکل ۷-۱۴. انعکاس دامنه‌های عبوری و بازتابی.

به طور مشابه دامنه عبوری پرتو  $Ar$  و دامنه انعکاسی پرتو  $At$ ، باید ترکیب شود تا به صفر برسد. چون در حالت اصلی هیچ پرتوی در مکان خط نقطه چین وجود ندارد، بنابراین به نتیجه  $r = -r'$  خواهیم رسید (روابط استوکس). اگر  $r^2 \equiv -r'^2$  باشد آنگاه نسبت شدت انعکاسی به شدت فرودی مشخص خواهد شد و روابط زیر بدست خواهد آمد :

$$r^2 = -r'^2 = R \quad \text{و} \quad 1 - R = tt' = T \quad (۷.۳۶)$$

بنابراین فرض نقره اندود کردن دو سطح برابر (به صورت مساوی) برابر است با :

$$E_2 = E_0(tt' + tt'r'^2 e^{i\Delta\phi} + tt'r'^4 e^{2i\Delta\phi} + \dots) = E_0 T(1 + R e^{i\Delta\phi} + R^2 e^{2i\Delta\phi} + \dots) \quad (۷.۳۷)$$

$\Delta\phi$  اختلاف فاز بین انعکاس‌های متوالی است و  $(1 + R e^{i\Delta\phi} + R^2 e^{2i\Delta\phi} + \dots)$  سری هندسی متناهی است. بنابراین داریم :

$$1 + \beta + \beta^2 + \dots = \frac{1}{1-\beta} \quad (۷.۳۸)$$

اگر  $\beta \equiv R \exp(i\Delta\phi)$  باشد آنگاه داریم:

$$E_2 = E_0 \frac{T}{1-R e^{i\Delta\phi}} \quad (۷.۳۹)$$

همچنین برای محاسبه شدت داریم:

$$E_2 = |E_0|^2 \frac{T^2}{(1-R e^{i\Delta\phi})(1-R e^{-i\Delta\phi})} = |E_0|^2 \frac{T^2}{1-R^2-2R \cos\Delta\phi} \quad (۷.۴۰)$$

نسبت شدت عمودی به فرودی برابر است با:

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{|E_2|^2}{|E_0|^2} = \frac{T^2}{1-R^2-2R \cos\Delta\phi} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2+4R \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (۷.۴۱)$$

شدت بازتابی برابر است با:

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{4R \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{(1-R)^2+4R \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (۷.۴۲)$$

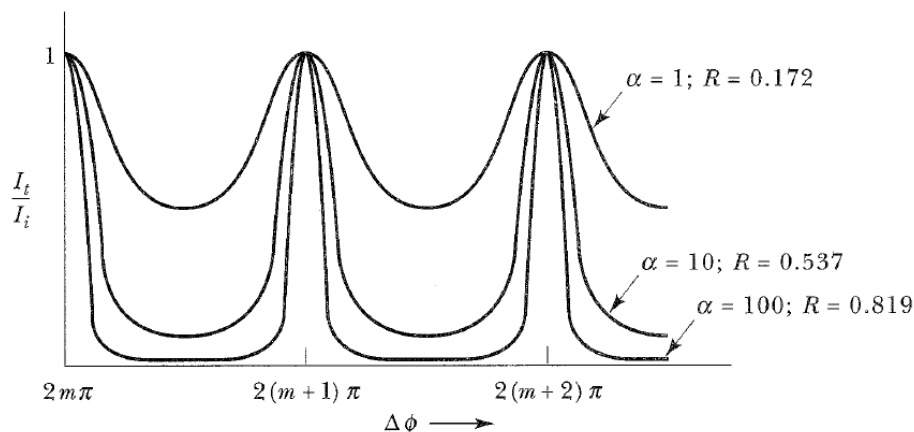
ماکزیم شدت عبوری برای اختلاف فاز (۷.۴۳) اتفاق خواهد افتاد:

$$\frac{\Delta\phi}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} nd \cos\theta_2 = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, 2, \dots) \quad (۷.۴۳)$$

اگر  $\alpha \equiv 4R/(1-R)^2$  باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{1+\alpha \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (۷.۴۴)$$

مطابق شکل ۷-۱۵ می توان تابع (۷.۴۴) را برای سه مقدار  $\alpha$  تشریح کرد. هنگامی که ضریب انعکاس زیاد می شود، فراتر روشن عبوری تیزتر خواهد شد و ضریب انعکاس با افزایش نقره اندود روی سطح شیشه، بزرگ تر خواهد شد.



شکل ۷-۱۵. ضریب انعکاس های مختلف مطابق تابع (۷.۴۴).

یکی از کاربردهای این موضوع، تداخل سنج فابری- پرو می باشد. در دو تیغه شیشه‌ای کاملاً موازی، سطوح داخلی نسبت به هم فاصله  $d$  دارند و به صورت جزئی نقره اندود هستند. انعکاس دو سطوح خارجی (که لایه نشانی شده‌اند) قابل چشم پوشی هستند. بنابراین محیط بین سطوح، هوا با ضریب شکست  $n = 1$  است. همانند تداخل سنج مایکلسون از یک منبع گسترده استفاده خواهد شد. زاویه  $\theta_2$  روی یک مخروط که محورش عمود بر صفحه است، ثابت خواهد بود و فرانژهای تداخلی، دایره‌ای است. فرانژهای روشن فابری - پرو با مرتبه  $m$  توسط معادله زیر بیان می شود:

$$(\Delta\phi)_m = \frac{4\pi}{\lambda} nd \cos(\theta_2)_m = 2m\pi \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta_2)_m = m \frac{\lambda}{2nd} \quad (۷.۴۵)$$

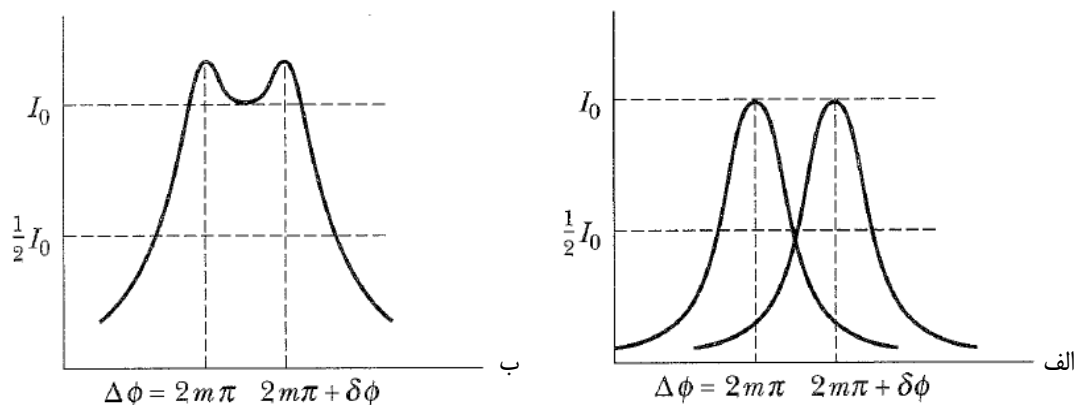
بخش صحیح  $2nd/\lambda$ ، مرتبه درونی ترین فرانژ است و مرتبه با حرکت به سمت بیرون، کاهش می یابد. اگر بیشتر از یک طول موج وجود داشته باشد، طرح فرانژها برهم نهی می کنند. البته اگر بازه طول موج با زاویه بیشتری از مراتب، باز شود آنگاه روی هم رفتگی اتفاق می افتد و باعث ایجاد مشکل خواهد شد. ماکزیمم افزایش  $\Delta\lambda$ ، محدوده طیفی آزاد است و اگر  $(m+1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$  باشد آنگاه داریم:

$$\frac{(\Delta\lambda)_{fsr}}{\lambda} = \frac{1}{m} \approx \frac{\lambda}{2d} \quad (۷.۴۶)$$

هنگامی محدوده طیفی آزاد محدود شود، فابری - پرو در مراتب خیلی بالا عمل می کند اما پراکندگی زاویه‌ای بزرگ است و بنابراین ساختار ریز خطوط طیفی، مفید خواهد بود. برای بررسی قابلیت تفکیک خطوط نزدیک درون محدوده طیفی آزاد و ایجاد تداخل سازنده خیلی باریک باید از ضرایب انعکاس بزرگ  $R$  استفاده کرد. اگر نفاط میانی شدت هر فرانژ در مکان مشابهی اتفاق بیافتد آنگاه دو فرانژ با شدت یکسان، قابل تفکیک خواهند بود. مطابق شکل ۷-۱۶، می توان جمع غیرهمدوسی برای شدت کل این دو فرانژ را بدست آورد. بنابراین شدت بر حسب  $\Delta\phi$  برابر است با:

$$I(\Delta\phi) = \frac{I_0}{1 + \alpha \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \quad (۷.۴۷)$$

$$\begin{cases} I_0 = I(2m\pi) \\ \frac{1}{2}I_0 = I\left(2m\pi + \frac{\delta\phi}{2}\right) \end{cases} \quad (۷.۴۸)$$



شکل ۷-۱۶. تفکیک خطوط نزدیک درون محدوده طیفی آزاد.

بنابراین داریم:

$$\frac{I_0}{1 + \alpha \sin^2\left(m\pi + \frac{\delta\phi}{4}\right)} = \frac{I_0}{2} \Rightarrow 1 + \alpha \left(\frac{\delta\phi}{4}\right)^2 = 2 \Rightarrow \delta\phi = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \quad (7.49)$$

همچنین با استفاده از روابط (7.34) و (7.43) داریم:

$$\Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda} nd \cos(\theta_2) \quad (7.50)$$

با دیفرانسیل‌گیری از فاز نسبت به طول موج داریم:

$$|\delta\phi| = 4\pi nd \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}\right) \cos\theta_2 \quad (7.51)$$

$\Delta\lambda$  افزایش دو طول موج معادل با شیف‌ت فاز  $\delta\phi$  می‌باشد. همچنین توان تفکیک نیز برابر است با:

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi nd \cos\theta_2}{\lambda} \frac{\sqrt{R}}{1-R} \approx \frac{2nd}{\lambda} \frac{\sqrt{R}}{1-R} \quad (7.52)$$

در فرم نهایی از تقریب  $1 \approx n \cos\theta_2$  استفاده شده است و  $R$  ضریب انعکاس هر سطح فابری - پرو می‌باشد.



## منابع کتاب

## فصل اول :

1. E.T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Philosophical Library, New York, 1951).
2. C. Domb, *Clerk Maxwell and Modern Science* (Athlone Press, Bristol, 1963).
3. J.C. Maxwell, "On physical lines of force", *Philosophical Magazine* 21, 281 (1861).
4. J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Clarendon, Oxford, 1873).
5. F.N.H. Robinson, *Macroscopic Electromagnetism* (Pergamon, Oxford, 1973).
6. M.S. Longair, *Theoretical Concepts in Physics* (University Press, Cambridge, 1984).
7. W.F. Brown, Jr., "Tutorial paper on dimensions and units", *IEEE Transactions on Magnetics* 20, 112 (1984).
8. J.Z. Buchwald, *From Maxwell to Microphysics* (University Press, Chicago, 1985).
9. B.J. Hunt, *The Maxwellians* (University Press, Cornell, 1991).
10. A. Liebsch, *Electronic Excitations at Metal Surfaces* (Plenum, New York, 1997).
11. P. Belli, R. Bernabei, C.J. Dai, et al., "New experimental limit on electron stability", *Physics Letters B* 460, 236 (1999).
12. J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd edition (Wiley, New York, 1999).
13. R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (University Press, Oxford, 2000).
14. O. Darrigol, *Electrodynamics from Ampere to Einstein* (University Press, Oxford, 2000).
15. G.T. Foster, S.L. Mielke, and L.A. Orozco, "Intensity correlations in cavity QED", *Physical Review A* 61, 53821 (2000).
16. E.R. Williams, "Sprites, elves, and glow discharge tubes", *Physics Today*, November 2001.
17. E. McMullin, "The origins of the field concept in physics", *Physics in Perspective* 4, 13 (2002).
18. R.M. Kulsrud and E.G. Zweibel, "On the origin of cosmic magnetic fields", *Reports on Progress in Physics* 71, 046901 (2008).

## فصل دوم :

19. M. Born, *Einstein's Theory of Relativity* (Methuen, London, 1924).
20. A. Einstein and L. Infeld, *The Evolution of Physics* (Simon and Schuster, New York, 1938).
21. J. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1941).
22. S.A. Schelkunoff, *Electromagnetic Waves* (Van Nostrand, Princeton, NJ, 1943).
23. E.T. Whittaker, "On an expression of the electromagnetic field due to electrons by means of two scalar potential functions", *Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2*, 1, 367 (1904).
24. M.L. Kales, "Elliptically polarized waves and antennas", *Proceedings of the IRE*. 39, 544 (1951).
25. D.S. Jones, *The Theory of Electromagnetism* (Macmillan, New York, 1964).
26. M.N. Wise, "The mutual embrace of electricity and magnetism", *Science* 203, 1310 (1979).
27. E.J. Konopinski, *Electromagnetic Fields and Relativistic Particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
28. D.H. Staelin, A.W. Morgenthaler, and J.A. Kong, *Electromagnetic Waves* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994).
29. U.S. Inan and A.S. Inan, *Electromagnetic Waves* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000).
30. D. Goldstein, *Polarized Light*, 2nd edition (Marcel Dekker, New York, 2003).
31. N.D. Mermin, "What's bad about this habit?", *Physics Today*, May 2009, pp. 8-9.

## فصل سوم :

32. James Clerk Maxwell, "A dynamical theory of the electromagnetic field", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155, 459 (1865).
33. Paul Drude, *Optics* (Longmans, Green and Co., London, 1902).
34. J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1941).
35. V.G. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ", *Soviet Physics Uspekhi* 10, 509 (1968).

36. R.H. Good, Jr. and T.J. Nelson, *Classical Theory of Electric and Magnetic Fields* (Academic, New York, 1971).
37. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 6th edition (University Press, Cambridge, 1980).
38. M.H. Nayfeh and M.K. Brussel, *Electricity and Magnetism* (Wiley, New York, 1985).
39. William T. Doyle, "Scattering approach to Fresnel's equations and Brewster's law", *American Journal of Physics* 53, 463 (1985).
40. V.D. Barger and M.G. Olsson, *Classical Electricity and Magnetism* (Allyn & Bacon, Newton, MA, 1987).
41. P. Yeh, *Optical Waves in Layered Media* (Wiley, New York, 1988).
42. C.A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics* (Wiley, New York, 1989).
43. S.G. Lipson, H. Lipson, and D.S. Tannhauser, *Optical Physics*, 3rd edition (University Press, Cambridge, 1995).
44. J.E. Vitela, "Electromagnetic waves in dissipative media revisited", *American Journal of Physics* 72, 393 (2004).
45. J.B. Pendry, "Negative refraction", *Contemporary Physics* 45, 191 (2004).

## فصل چهارم :

46. H.A. Lorentz, "Concerning the relation between the velocity of propagation of light and the density and composition of media", in *Collected Papers*, edited by P. Zeeman and A.D. Fokker (Martinus Nijhoff, The Hague, 1936).
47. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, Oxford, 1960).
48. F. Borgnis, "On electromagnetic energy density in dispersive media", *Zeitschrift für Physik* 159, 1 (1960).
49. R.H. Good, Jr. and T.J. Nelson, *Classical Theory of Electric and Magnetic Fields* (Academic, New York, 1971).
50. F. Wooten, *Optical Properties of Solids* (Academic, New York, 1972).
51. D.B. Melrose and R.C. McPhedran, *Electromagnetic Processes in Dispersive Media* (University Press, Cambridge, 1991).
52. P.A. Sturrock, *Plasma Physics* (University Press, Cambridge, 1994).
53. M. Fox, *Optical Properties of Solids* (University Press, Oxford, 2001).
54. T.J.M. Boyd and J.J. Sanderson, *The Physics of Plasmas* (University Press, Cambridge, 2003).
55. S. Linden, C. Enkrich, G. Dolling, et al. "Photonic metamaterials: Magnetism at optical frequencies", *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 12, 1097 (2006).
56. R. Merlin, "Metamaterials and the Landau-Lifshitz permeability argument: Large permittivity begets high-frequency magnetism", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106, 1693 (2009).

## فصل پنجم :

57. Eyges, Panofsky, Philips and Schwartz, *Alternative of the Lienard-Wiechert fields*.
58. Jackson, Landau and Lifshitz, *Treatments using the elegant relativistic four-vector method*.

## فصل ششم :

59. J. Brown and E. V. Jull, "The Prediction of Aerial Patterns from Near-Field Measurements," *IEE (London)*, Paper No. 3469E, pp. 635-644, November 1961.
60. R. C. Johnson, H. A. Ecker, and J. S. Hollis, "Determination of Far-Field Antenna Patterns from Near-Field Measurements," *Proc. IEEE*, Vol. 61, No. 12, pp. 1668-1694, December 1973.
61. D. T. Paris, W. M. Leach, Jr., and E. B. Joy, "Basic Theory of Probe-Compensated Near-Field Measurements," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-26, No. 3, pp. 373-379, May 1978.
62. E. B. Joy, W. M. Leach, Jr., G. P. Rodrigue, and D. T. Paris, "Applications of Probe-Compensated Near-Field Measurements," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-26, No. 3, pp. 379-389, May 1978.
63. E. F. Buckley, "Modern Microwave Absorbers and Applications," *Emerson & Cuming, Inc.*, Canton, MA.
64. A. W. Moeller, "The Effect of Ground Reflections on Antenna Test Range Measurements," *Microwave Journal*, Vol. 9, pp. 47-54, March 1966.
65. M. R. Gillette and P. R. Wu, "RF Anechoic Chamber Design Using Ray Tracing," 1977 *Int. IEEE/AP-S Symp. Dig.*, pp. 246-252, June 1977.
66. P. A. Beekman, "Prediction of the Fresnel Region Field of a Compact Antenna Test Range with Serrated Edges," *IEE Proc.*, Vol. 133, Pt. H, No. 2, pp. 108-114, April 1986.
67. H. F. Schluper, "Compact Antenna Test Range Analysis Using Physical Optics," *AMTA Proceedings*, pp. 309-312, Seattle, WA, October 1987.
68. J. D. Huff, J. H. Cook, Jr., and B. W. Smith, "Recent Developments in Large Compact Range Design," *AMTA Proceedings*, pp. 5-39-5-44, Columbus, OH, October 1992.
69. Y. Rahmat-Samii, V. Galindo, and R. Mittra, "A Plane-Polar Approach for Far-Field Construction from Near-Field Measurements," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-28, No. 3, pp. 216-230, March 1980.
70. J. J. Lee, E. M. Ferren, D. P. Woollen, and K. M. Lee, "Near-Field Probe Used as a Diagnostic Tool to Locate Defective Elements in an Array Antenna," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-36, No. 6, pp. 884-889, June 1988.
71. L. H. Hemming and R. A. Heaton, "Antenna Gain Calibration on a Ground Reflection Range," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-21, No. 4, pp. 532-537, July 1973.

## فصل هفتم :

72. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 2019.
73. J.E.Kasper and S.A.Feller, *The Complete Book of Holograms: How They Work and How to Make Them*, Jun 2012.
74. K. D. Möller, *Optics*, 1988.